



GRAAFITEORIA

Keijo Ruohonen

2013

Sisältö

1	I MÄÄRITELMIÄ JA PERUSTULOKSIA
1	1.1 Määritelmiä
5	1.2 Kulku. Reitti. Polku. Piiri. Yhtenäisyys. Komponentti
10	1.3 Graafien operaatioita
14	1.4 Irrotus
17	1.5 Merkityt graafit. Isomorfismi
19	II PUUT
19	2.1 Puut. Metsät
22	2.2 (Perus)piirit. (Perus)irrotusjoukot
26	III SUUNNATUT GRAAFIT
26	3.1 Määritelmiä
27	3.2 Suunnatut puut
30	3.3 Asykliset suunnatut graafit
32	IV GRAAFIEN MATRIISIT JA LINEAARIAVARUUDET
32	4.1 Graafien matriisiesityksiä
35	4.2 Irrotusmatriisi
38	4.3 Piirimatriisi
41	4.4 Sovellus: Stationääriset lineaariset verkot
46	4.5 Matriisit yli $GF(2):n$ ja graafien lineaariavaruudet
47	V GRAAFIEN ALGORITMIT
47	5.1 Algoritmien vaativuusteoriaa
49	5.2 Saavutettavuus: Warshallin algoritmi
50	5.3 Etsintä: Syvyysetsintä ja leveysetsintä
58	5.4 Kevyin polku: Dijkstran algoritmi
60	5.5 Kevyin polku: Floydin algoritmi
63	5.6 Kevyin virittävä puu: Kruskalin algoritmit ja Primin algoritmi
68	5.7 Kevyin Hamiltonin piiri eli kaupparatsuprobleema: Hehkutusalgoritmi. Karp–Held-heuristiikka
73	5.8 Kaksijakoisen graafin maksimisovitus: Unkarilainen algoritmi
77	5.9 Siirtoverkon maksimivirtaus: Ford–Fulkerson-algoritmi

82	VI GRAAFIEN PIIRTÄMINEN
82	6.1 Tasottuvuus ja tasograafit
87	6.2 Davidson–Harel-algoritmi
90	VII MATROIDIT
90	7.1 Perinnölliset järjestelmät
91	7.2 Graafin piirimatroidi
94	7.3 Muita perusmatroideja
96	7.4 Ahne algoritmi
98	7.5 Yleinen matroidi
101	7.6 Matroidien operaatioita
104	Kirjallisuus
106	Hakemisto

Esipuhe

Tämä moniste on tarkoitettu TTY:n kurssin ”MAT-62756 Graph Theory” suomenkieliseksi perusmateriaaliksi. Monisteessa käydään läpi graafiteoreettiset peruskäsitteet ja -tulokset painottaen erityisesti verkkoteoreettisia piiri-irrotus-dualismiin liittyviä asioita. Esikuvana on paljolti ollut kirjan SWAMY & THULASIRAMAN—erityisesti sen vanhemman ja paremman laitoksen—tyylikäs ja tarkka esitystyylillä. Sisällöltään vastaavanlaisia oppikirjoja (tosin laajempia) on nykyään saatavissa useitakin, mm. suosittu GROSS & YELLEN.

Eräs graafiteorian käyttötarkoitus on antaa yhtenäinen formalismi lukuisille hyvin erilaisilta näyttävillä probleemilla. Algoritmit riittää näin antaa vain tälle yhteiselle formalismille. Tämä on johtanut aivan omaan algoritmiluokkaansa, ns. *graafialgoritmeihin*. Puolet monisteesta käsittelee graafien algoritmeja, jälleen painottaen verkkoteoreettisia menetelmiä. Tässä osuudessa esitetään vain kohtuullisen kokoihin tehtäviin soveltuvia perusalgoritmeja. Erityisprobleemiin kuten suurten harvojen graafien käsittelyyn soveltuvia menetelmiä tai rinnakkaisalgoritmeja ei käsitellä, näissä kyse onkin jo paljolti sopivista tietorakenteista (ks. esimerkiksi SKIENA).

Perustaltaan graafiteoria on kombinatoriikkaa, jossa ei sinänsä tarvita ”grafiikkaa” muutoin kuin havainnollistamiseen. Graafiteorian sovelluksiin ja mallintamiseen liittyy kuitenkin yleensä tilanteeseen sopivan fysikaalis-geometrisen esityksen antama kontakti ”reaalimaailmaan” ja toisaalta kombinatoris-lineaarialgebrallisen koneiston antama matemaattinen määrittely- ja laskukyky.

Graafiteorian tulosten ja menetelmien todistuksia ja johtoja ei yleensä esitetä jäykän kombinatorisessa muodossa, vaan käyttäen tehokkaasti hyväksi graafisen esityksen antamaa havainnollistamismahdollisuutta. Tämä voi johtaa tilanteisiin, joissa lukijasta ei ehkä tunnu aivan varmalta, että esitetty todistus tai johto olisi täysin sitova. Graafiteorian kurssin yksi tavoite onkin antaa oikeanlainen ”tuntuma” graafiteorian esityksiin. Tämä on tarpeen, sillä täysin rigoriginen matemaattinen esitys on usein myös melkein täysin lukukelvoton, löysä ja aukkoinen esitys taas käyttökelpoton.

Varsinaista geometrista graafiteoriaa käsitellään lyhyesti Luvussa VI, jossa esitetään tasottuvuustestaukseen sekä graafin piirtoon sopivat yksinkertaiset algoritmit. Esitys on geometrisesti varsin pinnallinen. Se tarvitsisi oikeastaan tuekseen syvällisiä käyräteorian ja topologian tulok-

sia, joihin tässä ei kuitenkaan voida mennä. Viimeisessä luvussa on sitten lyhyt katsaus matroideihin, joista on muodostunut elegantti yleistys ja vaihtoehto monillekin graafiteoreettisille käsitteille.

Keijo Ruohonen

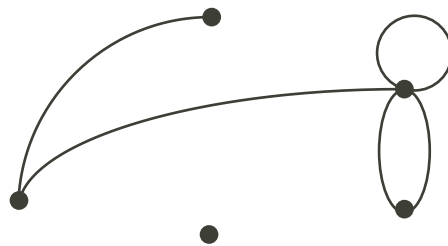
Luku 1

MÄÄRITELMIÄ JA PERUSTULOXSIA

1.1 Määritelmiä

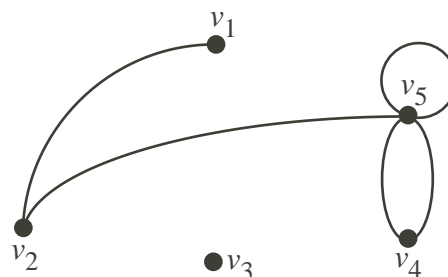
Havainnollisesti *graafi* muodostuu *pisteistä* sekä niitä yhdistävistä *viivoista*. ✓

Esimerkki.



Formaalisesti graafi on pari (V, E) , missä V on ns. *pisteiden joukko* sekä E pisteparien muodostama ns. *viivojen joukko*. E on ns. *multijoukko*, ts. sen alkiot esiintyvät joukossa mahdollisesti monta kertaa eli kullakin alkiolla on oma *multiplisiteettinsä*. Usein pisteitä merkitään kirjaimin (esimerkiksi a, b, c, \dots tai v_1, v_2, \dots) tai numeroin $1, 2, \dots$. Jatkossa näitä merkkejä itse asiassa käytetään V :n alkiaina.

Esimerkki. (Jatkoa) Merkitään pisteitä seuraavasti:

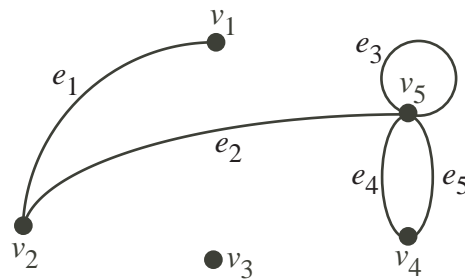


Silloin voidaan valita $V = \{v_1, \dots, v_5\}$ sekä $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_5), (v_5, v_4), (v_5, v_4)\}$.

Usein merkitään myös viivoja kirjaimin (esimerkiksi a, b, c, \dots tai e_1, e_2, \dots) tai numeroin $1, 2, \dots$ yksinkertaisuuden vuoksi.

Huomautus. Viivat (u, v) ja (v, u) ovat samat, ts. parit ovat järjestämättömiä.

Esimerkki. (Jatkoa) Merkitään vielä viivoja seuraavasti:



Silloin $E = \{e_1, \dots, e_5\}$.

Nimityksiä:

1. Pisteet u ja v ovat viivan (u, v) päätepisteet.
2. Viivat, joilla on samat päätepisteet, ovat rinnakkaiset.
3. Muotoa (v, v) oleva viiva on ns. *silmukka*.
4. Graafi on *yksinkertainen*, jos siinä ei ole rinnakkaisia viivoja eikä silmukoita.
5. Graafi, jossa ei ole lainkaan viivoja (ts. E on tyhjä), on *tyhjä*.
6. Graafi, jossa ei ole lainkaan pisteitä (ts. V ja E ovat tyhjiä), on ns. *nollagraafi*.
7. Graafi, jossa on vain yksi piste, on *triviaali*.
8. Viivat ovat *vierekkäiset* eli *vierusviivat*, jos niillä on yhteinen päätepiste.
9. Pisteet u ja v ovat *vierekkäiset* eli *vieruspisteet*, jos niitä yhdistää viiva, ts. (u, v) on viiva.
10. Pisteiden v *aste*, merkitään $d(v)$, on niiden viivojen lukumäärä, joiden päätepiste v on. Silmukat lasketaan mukaan kahdesti ja rinnakkaiset viivat multiplisiteettinsä osoittaman määrän kertoja.
11. Piste, jonka aste on 1, on ns. *loppupiste*.
12. Viiva, jonka päätepisteenä on loppupiste, on ns. *loppuviiva*.
13. Piste, jonka aste on 0, on ns. *irtopiste*.

Esimerkki. (Jatkoa) Edellä

- v_4 ja v_5 ovat e_5 :n päätepisteet.
- e_4 ja e_5 ovat rinnakkaiset.
- e_3 on silmukka.
- graafi ei ole yksinkertainen.
- e_1 ja e_2 ovat vierekkäiset.
- v_1 ja v_2 ovat vierekkäiset.

- v_1 :n aste on 1, ts. se on loppupiste.
- e_1 on loppuviiva.
- v_5 :n aste on 5.
- v_4 :n aste on 2.
- v_3 :n aste on 0, ts. se on irtopiste.

Graafeja merkitään jatkossa yleensä kirjaimin, esimerkiksi

$$G = (V, E).$$

Merkitään $\delta(G)$:llä graafin G pisteiden *minimiastetta* (= 0, jos G :ssä on irtopisteitä). Vastavasti merkitään $\Delta(G)$:llä G :n pisteiden *maksimiastetta*.

Esimerkki. (Jatkoa) Edellä $\delta(G) = 0$ ja $\Delta(G) = 5$.

Huomautus. Jatkossa tarkastellaan vain äärellisiä graafeja, ts. V ja E ovat äärellisiä.

Koska jokaisella viivalla on kaksi päätepistettä, saadaan välittömästi

Lause 1.1. Graafille $G = (V, E)$, missä $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ja $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, on

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m.$$

Seuraus. Graafissa on paritonta astetta olevia pisteitä aina parillinen määrä.

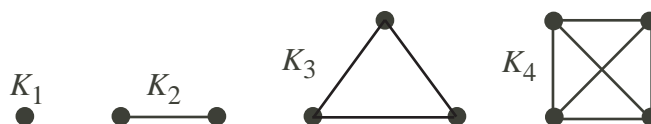
Todistus. Jos pisteiden v_1, \dots, v_k asteet ovat parittomat ja pisteiden v_{k+1}, \dots, v_n asteet parilliset, niin (Lause 1.1)

$$d(v_1) + \dots + d(v_k) = 2m - d(v_{k+1}) - \dots - d(v_n)$$

on parillinen, joten myös k on parillinen. □

Esimerkki. (Jatkoa) Nyt $1 + 2 + 0 + 2 + 5 = 10 = 2 \cdot 5$ ja v_1 :n sekä v_5 :n asteet ovat parittomat (2 kpl).

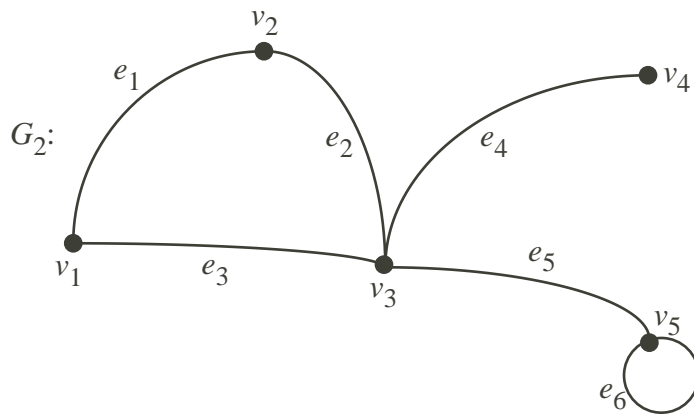
Yksinkertainen graafi, jossa on kaikki mahdolliset viivat, on ns. *täydellinen graafi*. Täydellistä n pisteen graafia merkitään K_n :llä. Neljä ensimmäistä täydellistä graafia:



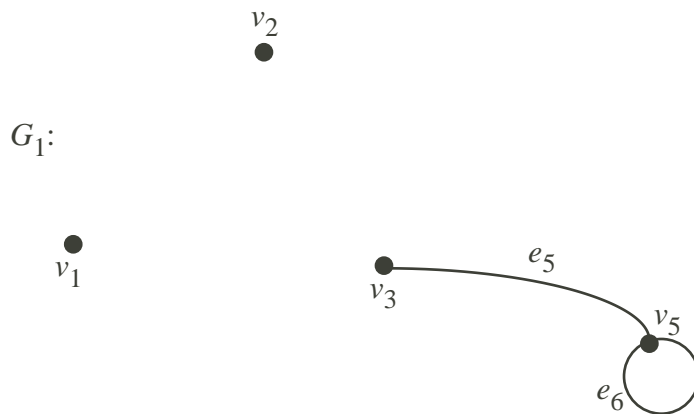
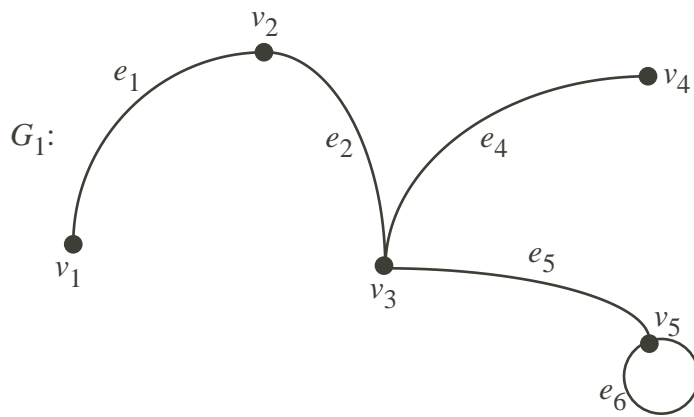
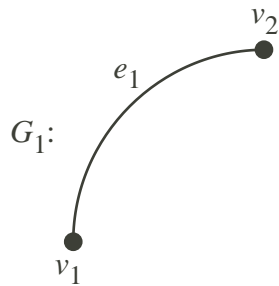
Graafi $G_1 = (V_1, E_1)$ on graafin $G_2 = (V_2, E_2)$ *aligraafi*, jos

1. $V_1 \subseteq V_2$ ja
2. jokainen G_1 :n viiva on myös G_2 :n viiva.

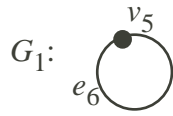
Esimerkki. Jos graafi on



niin sen aligraafeja ovat esimerkiksi



ja

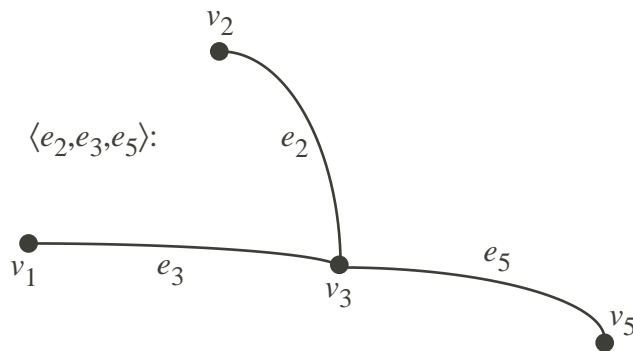


Graafin $G = (V, E)$ viivojen joukon $E_1 \subseteq E$ indusoima G :n aligraafi on

$$G_1 = (V_1, E_1) =_{\text{merk.}} \langle E_1 \rangle,$$

missä V_1 muodostuu kaikista E_1 :n viivojen päätepisteistä.

Esimerkki. (Jatkoa) G :n viivojen e_2, e_3 ja e_5 indusoima aligraafi on

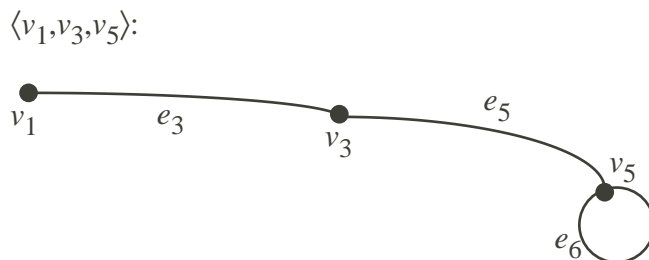


Graafin $G = (V, E)$ pisteiden joukon $V_1 \subseteq V$ indusoima G :n aligraafi on

$$G_1 = (V_1, E_1) =_{\text{merk.}} \langle V_1 \rangle,$$

missä E_1 muodostuu niistä viivoista, joiden päätepisteet ovat V_1 :ssä.

Esimerkki. (Jatkoa) G :n pisteiden v_1, v_3 ja v_5 indusoima aligraafi on



G :n täydellinen aligraafi on ns. G :n klikki.

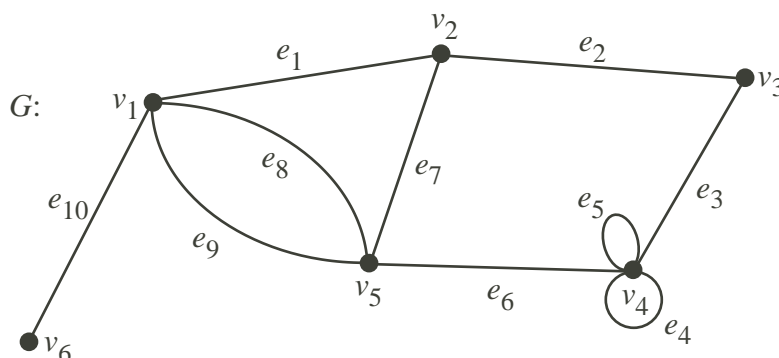
1.2 Kulku. Reitti. Polku. Piiri. Yhtenäisyys. Komponentti

Graafin $G = (V, E)$ kulku on äärellinen jono

$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k},$$

jossa on lomittain G :n pisteitä ja viivoja ja aina $v_{i_{t-1}}$ sekä v_{i_t} ovat e_{j_t} :n päätepisteet ($t = 1, \dots, k$). v_{i_0} on kulun alkupiste ja v_{i_k} sen loppupiste. k on kulun pituus. Ääritapauksena yksi piste v_{i_0} katsotaan 0-pituiseksi kuluksi. Kulussa saavat pisteet ja viivat esiintyä useitakin kertoja. Kulku on avoin, jos $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, muuten suljettu. (Suljettua kulkua sanotaan myös kierrokseksi.)

Esimerkki. Graafissa



$v_2, e_7, v_5, e_8, v_1, e_8, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_5, v_4$

on avoin kulku. Sen sijaan

$v_4, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4$

on suljettu kulku.

Kulku on reitti, jos siinä ei mikään viiva esiinny useita kertoja. Pistepari u, v voi esiintyä tällöin kulun peräkkäisinä pisteinä enintään niin monta kertaa kuin on pisteitä u ja v yhdistäviä rinnakkaisia viivoja.

Esimerkki. (Jatkoa) Edellä olevassa graafissa

$v_1, e_8, v_5, e_9, v_1, e_1, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_4, v_4$

on reitti.

Reitti on polku, jos siinä ei esiinny mikään piste useasti mahdollisesti päätepisteitä lukuunottamatta, kun ne ovat samat. Suljettu polku on piiri. Yksinkertaisuuden vuoksi jatkossa oletetaan vielä, että piiri ei ole tyhjä, ts. sen pituus on ≥ 1 . Polut ja piirit samaistetaan myös jatkossa viivojensa generoimiin aligraafeihin.

Esimerkki. (Jatkoa) Edellä olevassa graafissa

$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$

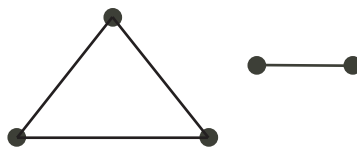
on polku ja

$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$

on piiri.

Kulkua, jonka alkupiste on u ja loppupiste v , sanotaan u - v -kuluksi. Graafin pisteet u ja v ovat yhdistetyt, jos graafissa on u - v -kulku (jolloin siinä on myös u - v -polku!). Jos u ja v ovat yhdistetyt ja toisaalta myös v ja w ovat yhdistetyt, niin myös u ja w ovat yhdistetyt; ts. jos graafissa on u - v -kulku ja v - w -kulku, niin siinä on myös u - w -kulku. Graafi on yhtenäinen, jos sen mitkä tahansa kaksi eri pistettä ovat yhdistetyt. (Erityisesti triviaali graafi katsotaan yhtenäiseksi.)

Esimerkki. Graafi



ei ole yhtenäinen.

Graafin G aligraafi G_1 (ei nollagraafi) on G :n komponentti, jos

1. G_1 on yhtenäinen ja
2. joko G_1 on triviaali (G :n irtopiste) tai sitten se on ei-triviaali ja niiden viivojen indusoima G :n aligraafi, joiden (jompikumpi) päätepiste on G_1 :n piste (lue toiseenkin kertaan!).

Graafin eri komponenteilla ei ole yhteisiä pisteitä, sillä

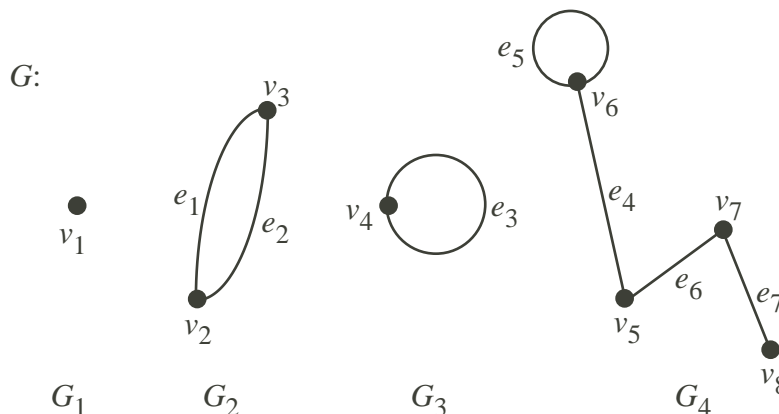
Lause 1.2. Jos graafin G piste v on yhdistetty sen komponentin G_1 johonkin pisteeseen, niin v on G_1 :n piste.

Todistus. Jos v on yhdistetty G_1 :n pisteeseen v' , niin G :ssä on kulku

$$v = v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, e_{j_k}, v_{i_k} = v'.$$

Koska v' on G_1 :n piste, niin (ehto 2. yllä) e_{j_k} on G_1 :n viiva ja $v_{i_{k-1}}$ on G_1 :n piste. Näin jatkaen päätellään lopulta, että v on G_1 :ssä. □

Esimerkki. Graafin



komponentit ovat G_1, G_2, G_3 ja G_4 .

Lause 1.3. Kukin graafin G piste kuuluu tarkalleen yhteen G :n komponenttiin. Samoin kukin G :n viiva kuuluu tarkalleen yhteen G :n komponenttiin.

Todistus. Valitaan G :n piste v . Suoritetaan seuraava operaatio toistuvasti niin monta kertaa kuin mahdollista lähtien pistejoukosta $V_1 = \{v\}$:

- (*) Jos v' on sellainen G :n piste, että $v' \notin V_1$ ja v' on yhdistetty johonkin V_1 :n pisteeseen, niin $V_1 \leftarrow V_1 \cup \{v'\}$.

Koska G :ssä on äärellinen määrä pisteitä, prosessi pysähtyy ennen pitkää. Viimeksi saadun V_1 :n indusoima G :n aligraafi G_1 on se G :n komponentti, johon v kuuluu. G_1 on yhtenäinen, koska sen v :stä eroavat pisteet ovat yhdistetyt v :hen ja siis myös toisiinsa. Ehto 2. toteutuu, sillä operaatiota (*) ei enää voitu toistaa. Lauseen 1.2 nojalla v ei kuulu kahteen eri komponenttiin.

Graafin viiva kuuluu päätepisteidensä määräämään komponenttiin. \square

Lause 1.3 antaa graafin jaon komponentteihin. Lauseen todistus antaa erään algoritmin, jolla jako voidaan suorittaa: toistetaan todistuksen menettelyä kunnes ”pisteet loppuvat”. Irtopisteet muodostavat kukin oman komponenttinsa. Yhtenäisellä graafilla on vain yksi komponentti, ts. graafi itse.

Graafin G , jossa on n pistettä, m viivaa ja k komponenttia, *aste* eli *rangi* on

$$\rho(G) = n - k$$

ja sen *nulliteetti* on

$$\mu(G) = m - n + k.$$

Ilmeisesti $\rho(G) \geq 0$ ja $\rho(G) + \mu(G) = m$. Myös $\mu(G) \geq 0$, sillä

Lause 1.4. $\rho(G) \leq m$

Todistus. Käytetään täydellistä induktiota m :n suhteen.

Induktion lähtökohta: $m = 0$. Nyt komponentit ovat triviaaleja ja $n = k$.

Induktio-oletus: Lause on oikea, kun $m < p$. ($p \geq 1$)

Induktioväite: Lause on oikea, kun $m = p$.

Induktioväitteen todistus: Valitaan jokin G :n komponentti G_1 , jossa on viiva. Merkitään ko. viivaa e :llä ja sen päätepisteitä u :lla ja v :llä. Merkitään edelleen G_2 :lla sitä G :n ja G_1 :n aligraafia, joka saadaan poistamalla G_1 :stä viiva e (muttei pisteitä u ja v). Merkitään vielä G' :lla graafia, joka saadaan poistamalla G :stä viiva e (muttei pisteitä u ja v), ja k' :lla G' :n komponenttien lukumäärää. Saadaan kaksi tapausta:

1. G_2 on yhtenäinen. Tällöin $k' = k$. Sovelletaan induktio-oletusta G' :uun:

$$n - k = n - k' = \rho(G') \leq m - 1 < m.$$

2. G_2 ei ole yhtenäinen. Tällöin u :ta ja v :tä yhdistää G_1 :ssä ja G :ssä vain polku

$$u, e, v$$

eikä mikään muu polku. G_2 :ssa on siis kaksi komponenttia ja $k' = k + 1$. Sovelletaan induktio-oletusta G' :uun:

$$\rho(G') = n - k' = n - k - 1 \leq m - 1.$$

Siis $n - k \leq m$. \square

Tämän tapaisilla kombinatorisilla tuloksilla on useita seurauksia. Yksi esimerkki:

Lause 1.5. Jos G on yhtenäinen graafi ja $k \geq 2$ sen suurin mahdollinen polun pituus, niin jokaisella kahdella k :n pituisella G :n polulla on ainakin yksi yhteinen piste.

Todistus. Katsotaan vain tilanne, jossa kumpikaan poluista ei ole piiri (muut tilanteet käsitellään vastaavasti). Otetaan kaksi k -pituista G :n polkua

$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k} \quad (\text{polku } p_1)$$

sekä

$$v_{i'_0}, e_{j'_1}, v_{i'_1}, e_{j'_2}, \dots, e_{j'_k}, v_{i'_k} \quad (\text{polku } p_2)$$

ja asetetaan vastaoletus: Poluilla p_1 ja p_2 ei ole yhteisiä pisteitä. Koska G on yhtenäinen, on olemassa $v_{i_0}-v_{i'_k}$ -polku. Etsitään tältä polulta viimeinen piste, joka on polulla p_1 (ainakin v_{i_0} on p_1 :llä), sanotaan v_{i_t} , ja sen jälkeen saadulta $v_{i_t}-v_{i'_k}$ -polulta ensimmäinen piste, joka on polulla p_2 (ainakin $v_{i'_k}$ on p_2 :lla), sanotaan $v_{i'_s}$. Näin saadaan $v_{i_t}-v_{i'_s}$ -polku

$$v_{i_t}, e_{j''_1}, \dots, e_{j''_\ell}, v_{i'_s}.$$

Tilanne on seuraavannäköinen:

$$\begin{array}{c} v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_t}, e_{j_{t+1}}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k} \\ e_{j''_1} \\ \vdots \\ e_{j''_\ell} \\ v_{i'_0}, e_{j'_1}, v_{i'_1}, \dots, v_{i'_s}, e_{j'_{s+1}}, \dots, e_{j'_k}, v_{i'_k} \end{array}$$

Tästä saadaan kaksi uutta polkua: $v_{i_0}-v_{i'_k}$ -polku ja $v_{i'_0}-v_{i_k}$ -polku. Kaksi tapausta:

- $t \geq s$: Nyt $v_{i_0}-v_{i'_k}$ -polun pituus on $\geq k + 1$. \checkmark ¹
- $t < s$: Nyt $v_{i'_0}-v_{i_k}$ -polun pituus $\geq k + 1$. \checkmark

□

Graafi on *piiritön*, jos siinä ei ole yhtään piiriä.

Lause 1.6. *Graafi on piiritön täsmälleen silloin, kun siinä ei ole silmukoita ja mitään kahta eri pistettä ei yhdistä kaksi eri polkua.*

Todistus. Otetaan ensin piiritön graafi G . Silloin G :ssä ei ole silmukoita. Asetetaan vastaoletus: G :n eri pisteitä u ja v yhdistää kaksi eri polkua

$$u = v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k} = v \quad (\text{polku } p_1)$$

ja

$$u = v_{i'_0}, e_{j'_1}, v_{i'_1}, e_{j'_2}, \dots, e_{j'_\ell}, v_{i'_\ell} = v \quad (\text{polku } p_2)$$

(tässä siis $i_0 = i'_0$ ja $i_k = i'_\ell$), missä $k \geq \ell$. Valitaan pienin sellainen indeksi t , että

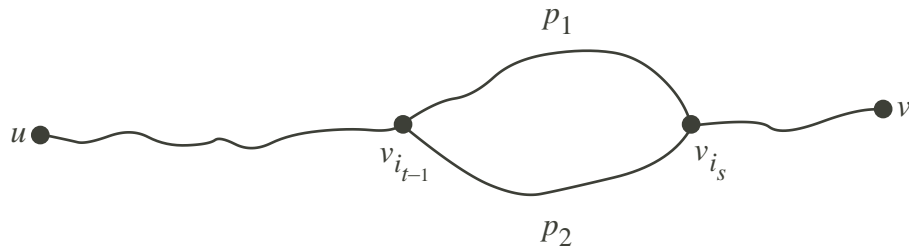
$$v_{i_t} \neq v_{i'_t}.$$

Tällainen on toki olemassa, sillä muutoin joko

1. $k > \ell$ ja $v_{i_k} = v = v_{i'_\ell} = v_{i_\ell}$ (\checkmark) tai

¹Tässä ja jatkossa merkki \checkmark tarkoittaa ristiriitaa. Jos oletuksista on päästy ristiriitaan, niin ne eivät voi olla yhtäaikaa paikkansa pitäviä.

2. $k = \ell$ ja $v_{i_0} = v'_{i'_0}, \dots, v_{i_\ell} = v'_{i'_\ell}$. Tällöin joidenkin kahden peräkkäisen polun pisteen välillä on rinnakkaisia viivoja ja G :ssä olisi piiri. \checkmark



Valitaan sitten pienin sellainen indeksi s , että $s \geq t$ ja v_{i_s} on polulla p_2 (ainakin v_{i_k} on p_2 :lla). Valitaan vielä sellainen indeksi r , että $r \geq t$ ja $v'_{i'_r} = v_{i_s}$ (tällainen on, sillä p_1 on polku). Mutta silloin

$$v_{i_{t-1}}, e_{j_t}, \dots, e_{j_s}, v_{i_s} (= v'_{i'_r}), e_{j'_r}, \dots, e_{j'_t}, v'_{i'_{t-1}} (= v_{i_{t-1}})$$

on piiri. \checkmark (Tarkista erityisesti tapaus $t = s = r$.)

Toiseksi, jos graafissa ei ole silmukoita ja sen kahta eri pistettä ei yhdistä kaksi eri polkua, siinä ei voi olla piirejä. Jos nimittäin esimerkiksi

$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k} = v_{i_0}$$

on piiri, olisi joko $k = 1$ ja e_{j_1} silmukka (\checkmark) tai sitten $k \geq 2$ ja pisteitä v_{i_0} ja v_{i_1} yhdistäisi kaksi eri polkua

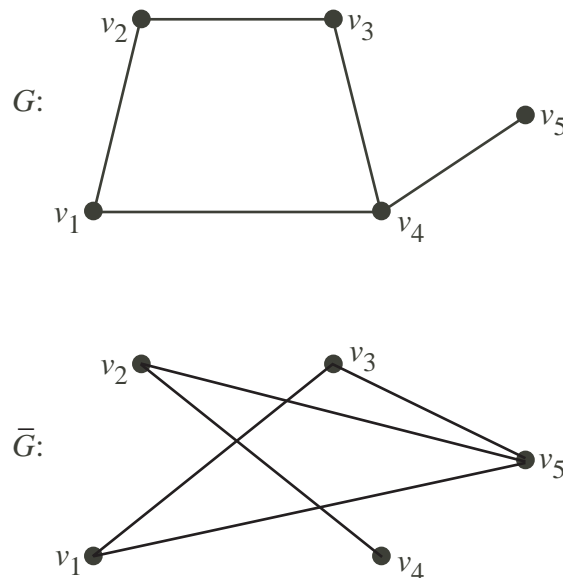
$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1} \quad \text{ja} \quad v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k} = v_{i_0} \quad (\checkmark).$$

□

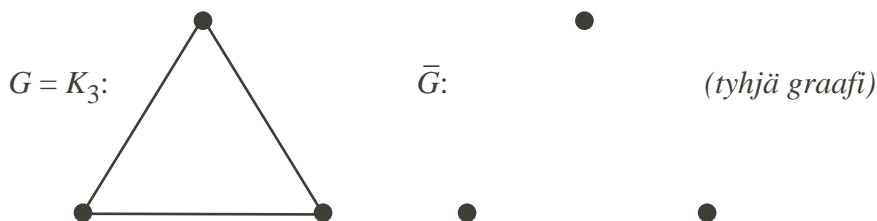
1.3 Graafien operaatioita

Yksinkertaisen graafin $G = (V, E)$ komplementti on yksinkertainen graafi $\bar{G} = (V, \bar{E})$, missä \bar{E} :ssa ovat tarkalleen ne viivat, jotka eivät ole G :ssä.

Esimerkki.



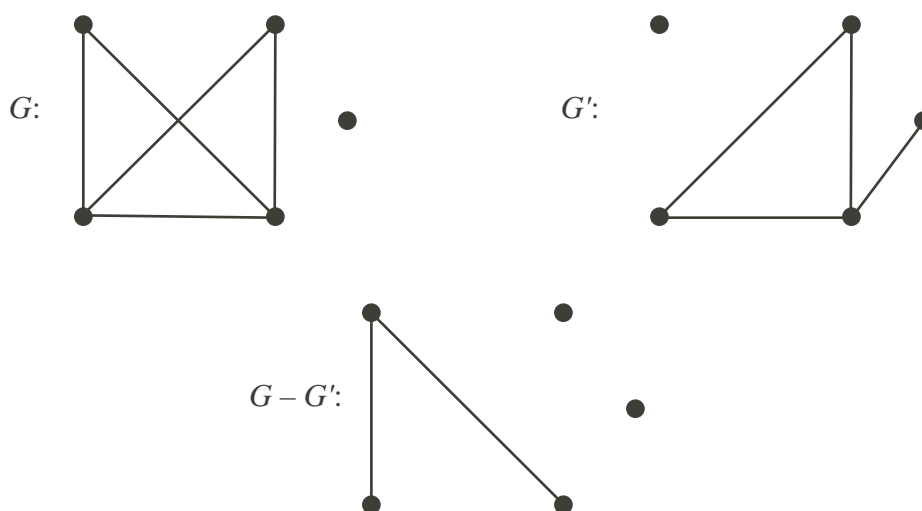
Esimerkki.



Ilmeisesti $\overline{\bar{G}} = G$.

Jos graafit $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ ovat yksinkertaisia ja $V' \subseteq V$, on graafien erotus $G - G' = (V, E'')$, missä E'' :ssa ovat ne viivat, jotka ovat G :ssä, mutta eivät ole G' :ssa (yksinkertainen graafi).

Esimerkki.



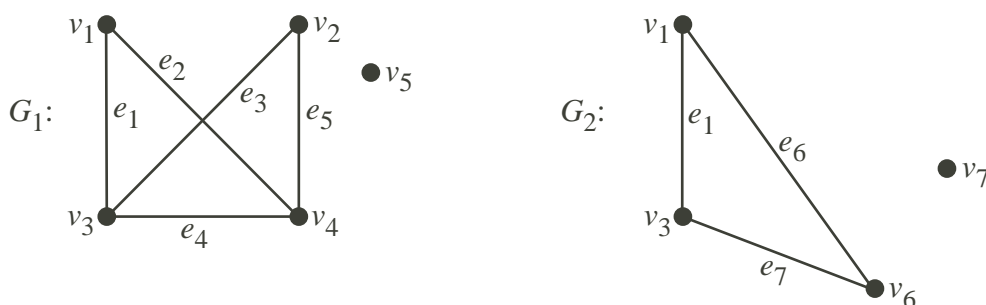
Kahden yksinkertaisen graafin $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$

- yhdiste on $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ (yksinkertainen graafi).
- leikkaus on $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ (yksinkertainen graafi).
- rengassumma $G_1 \oplus G_2$ on viivojen joukon $E_1 \oplus E_2$ indusoima $G_1 \cup G_2$:n aligraafi (yksinkertainen graafi). *Huom!* Joukoille operaatio \oplus on ns. symmetrinen erotus, ts.

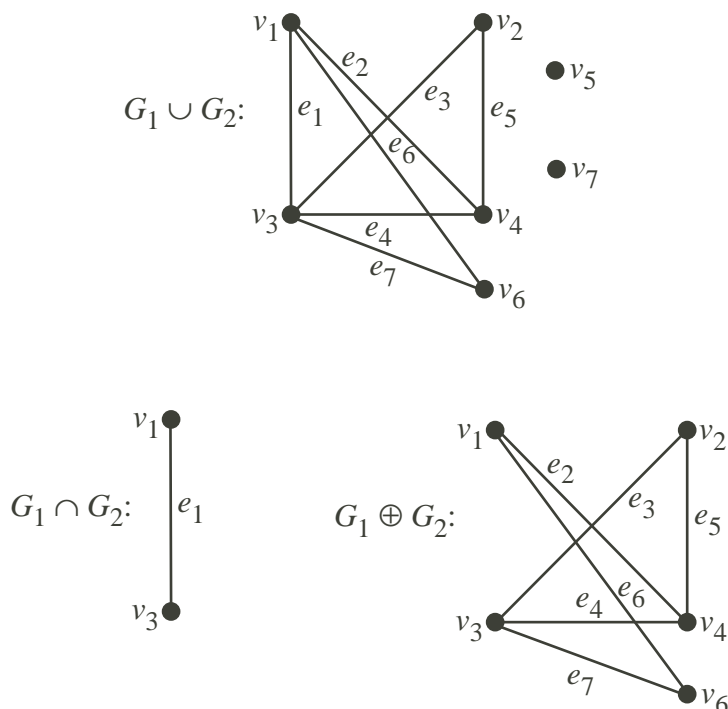
$$E_1 \oplus E_2 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1).$$

Koska rengassumma on viivojen indusoima aligraafi, siinä ei ole irtopisteitä. Kaikki kolme operaatiota ovat vaihdannaisia ja liitännäisiä.

Esimerkki. Jos graafit ovat



niin



Huomautus. Operaatiot \cup , \cap ja \oplus voidaan määritellä myös yleisesti graafeille, ei pelkästään yksinkertaisille graafeille. Tällöin on luonnollisella tavalla ”pidettävä kirjaa” viivojen multiplisiteeteistä:

\cup : Viivan multiplisiteetti $G_1 \cup G_2$:ssa on maksimi sen multiplisiteeteistä G_1 :ssä ja G_2 :ssa.

\cap : Viivan multiplisiteetti $G_1 \cap G_2$:ssa on minimi sen multiplisiteeteistä G_1 :ssä ja G_2 :ssa.

\oplus : Viivan multiplisiteetti $G_1 \oplus G_2$:ssa on $|m_1 - m_2|$, missä m_1 on sen multiplisiteetti G_1 :ssä ja m_2 multiplisiteetti G_2 :ssa.

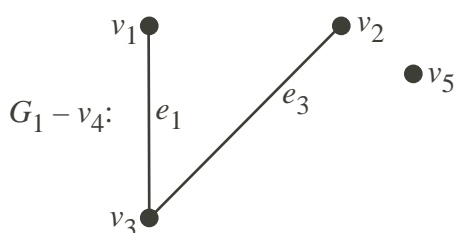
(Olemattoman viivan multiplisiteetti sovitaan nolaksi.) Edelleen myös graafien G ja G' erotus voidaan yleistää kaikille graafeille ottamalla multiplisiteetit huomioon: Viivan e multiplisiteetti $G - G'$:ssa on

$$m_1 \dot{-} m_2 = \begin{cases} m_1 - m_2, & \text{jos } m_1 \geq m_2 \\ 0, & \text{jos } m_1 < m_2 \end{cases} \quad (\text{ns. sopiva erotus}),$$

missä m_1 ja m_2 ovat e :n multiplisiteetit G_1 :ssä ja G_2 :ssa, vastaavasti.

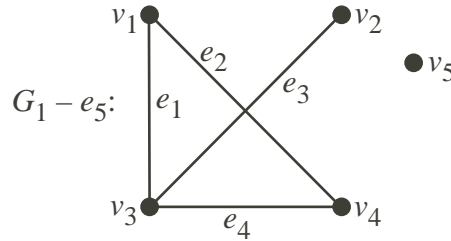
Jos v on graafin $G = (V, E)$ piste, niin $G - v$ on pistejoukon $V - \{v\}$ indusoima G :n aligraafi. Tämä operaatio on ns. *pisteen poisto*.

Esimerkki. (Jatkoa)



Vastaavasti, jos e on graafin $G = (V, E)$ viiva, niin $G - e$ on graafi (V, E') , missä E' saadaan E :stä poistamalla siitä e . Operaatio on ns. *viivan poisto*. Huomaa, ettei kyseessä ole joukko-opillinen viivan poisto, sillä ko. viiva voi esiintyä moninkertaisena ja se poistetaan vain kerran.

Esimerkki. (Jatkoa)



Jos u ja v ovat graafin $G = (V, E)$ eri pisteitä, niin graafi, joka saadaan *yhdistämällä pisteet* u ja v , on (V', E') , missä

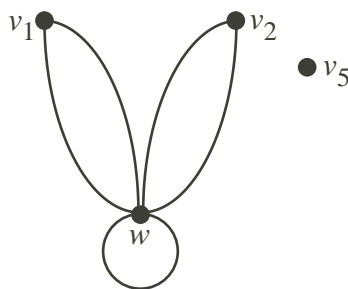
$$V' = (V - \{u, v\}) \cup \{w\} \quad (w \notin V \text{ on "uusi" piste})$$

ja

$$E' = (E - \{(v', u), (v', v) \mid v' \in V\}) \cup \{(v', w) \mid (v', u) \in E \text{ tai } (v', v) \in E\} \\ \cup \{(w, w) \mid (u, u) \in E \text{ tai } (v, v) \in E\}$$

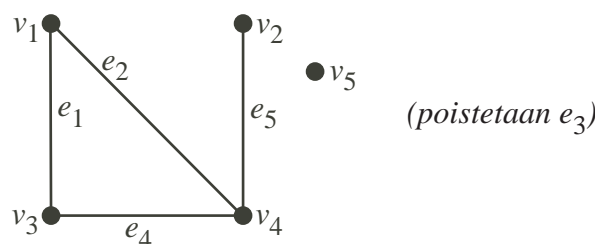
(muista, että viivoja vastaavat pisteparit ovat järjestämättömiä). *Huom!* Viivojen multiplisiteetit tulee säilyttää. Erityisesti viivasta (u, v) tulee silmukka.

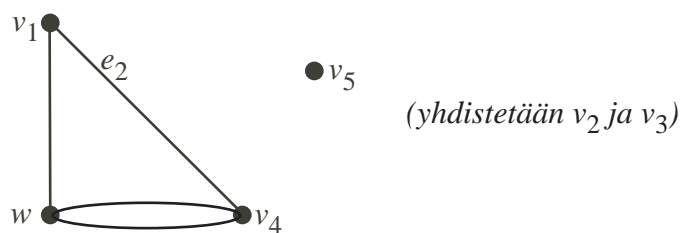
Esimerkki. (Jatkoa) Yhdistetään v_3 ja v_4 graafissa G_1 :



Graafin $G = (V, E)$ viivan (ei silmukan) $e = (u, v)$ *kutistamisella* tarkoitetaan operaatiota, jossa ensin poistetaan e ja sitten yhdistetään u ja v . (Silmukan kutistus yksinkertaisesti poistaa ko. silmukan.)

Esimerkki. (Jatkoa) Kutistetaan G_1 :n viiva e_3 :



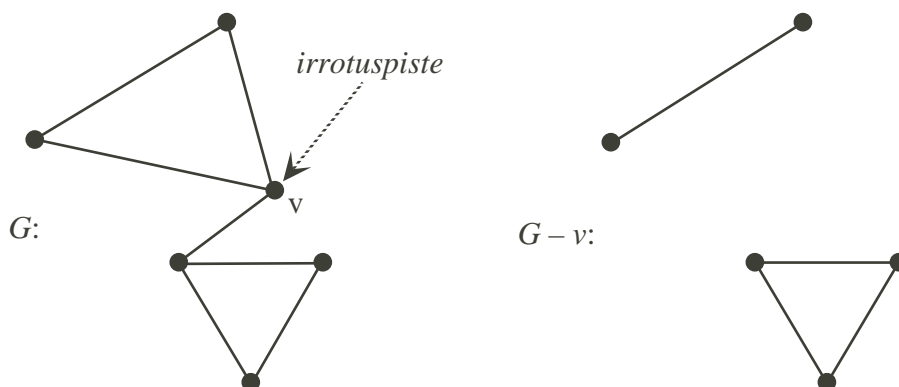


Huomautus. Jos pisteiden yhdistäminen ja viivan kutistus rajoitetaan yksinkertaisille graafeille, niin tuloksesta poistetaan silmukat ja rinnakkaisista viivoista valitaan pisteparia kohden yksi.

1.4 Irrotus

Graafin G piste v on G :n irrotuspiste, jos $G - v$:ssä on enemmän komponentteja kuin G :ssä.

Esimerkki. Alla olevassa graafissa v on irrotuspiste:

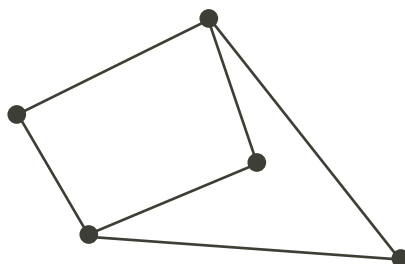


(Huom! Triviaalin graafin ainoa piste ei ole irrotuspiste, eikä irtopiste yleensääkään.)

Graafi on *separoituva*, jos se on epäyhtenäinen tai sitten siinä on ainakin yksi irrotuspiste. Muussa tapauksessa graafi on *separoitumaton*.

Esimerkki. Edellisen esimerkin graafi G on separoituva.

Esimerkki. Alla oleva graafi on separoitumaton.

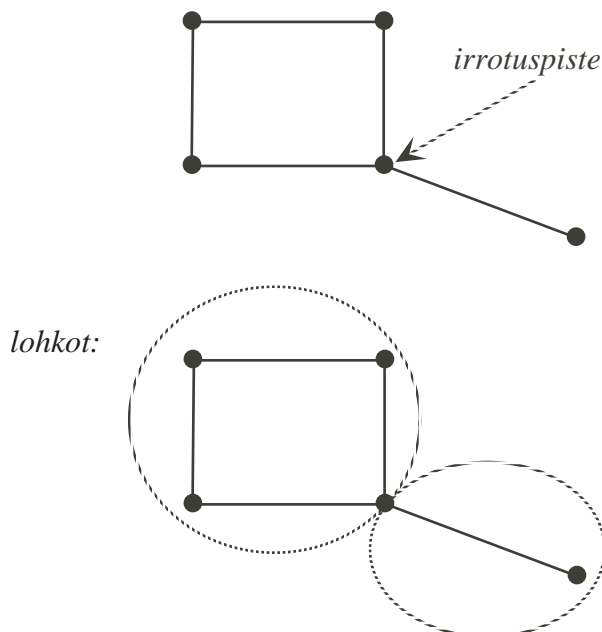


Graafin G lohko on sellainen G :n aligraafi G_1 (ei nollagraafi), että

- G_1 on separoitumaton ja

- jos G_2 on toinen G :n aligraafi, niin joko $G_1 \cup G_2 = G_1$ tai sitten $G_1 \cup G_2$ on separoituva (mietipä tätäkin!).

Esimerkki. Alla oleva graafi on separoituva:



Lause 1.7. Piste v on yhtenäisen graafin G irrotuspiste täsmälleen silloin, kun on olemassa kaksi sellaista G :n pistettä u ja w , että

- $v \neq u$, $v \neq w$ ja $u \neq w$, mutta
- v on jokaisella u - w -polulla.

Todistus. Katsotaan aluksi tilannetta, jossa v on G :n irrotuspiste. Siis $G - v$ ei ole yhtenäinen ja sillä on ainakin kaksi komponenttia $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$. Valitaan $u \in V_1$ ja $w \in V_2$. G :ssä on u - w -polku, koska se on yhtenäinen. Jos v ei ole tällä polulla, on ko. polku myös $G - v$:ssä (\checkmark). Sama koskee mitä tahansa G :n u - w -polkua.

Jos taas v on jokaisella u - w -polulla, niin pisteet u ja w eivät ole yhdistetyt $G - v$:ssä. \square

Lause 1.8. Ei-triviaalissa graafissa on ainakin kaksi pistettä, jotka eivät ole irrotuspisteitä.

Todistus. Käytetään induktiota graafin G pisteiden lukumäärän n suhteen.

Induktion lähtökohta: Nyt $n = 2$ ja asia on ilmeinen.

Induktio-oletus: Lause on oikea, kun $n \leq k$. ($k \geq 2$)

Induktioväite: Lause on oikea, kun $n = k + 1$.

Induktioväitteen todistus: Jos G :ssä ei ole irrotuspisteitä, on asia selvä. Muutoin otetaan tarkasteltavaksi jokin G :n irrotuspiste v . Olkoot $G - v$:n komponentit G_1, \dots, G_m (jolloin $m \geq 2$). Kullekin komponentille G_i on kaksi vaihtoehtoa:

1. G_i on triviaali, jolloin sen ainoa piste on G :n loppupiste tai irtopiste, mutta ei ole G :n irrotuspiste.
2. G_i ei ole triviaali. Induktio-oletuksen nojalla G_i :ssä on kaksi pistettä u ja w , jotka eivät ole irrotuspisteitä G_i :ssä. Jos nyt v ja u (vast. v ja w) eivät ole vierekkäiset G :ssä, ei u (vast. w) ole G :n irrotuspiste. Jos sekä v ja u että v ja w ovat vierekkäiset G :ssä, eivät u ja w voi olla G :n irrotuspisteitä.

\square

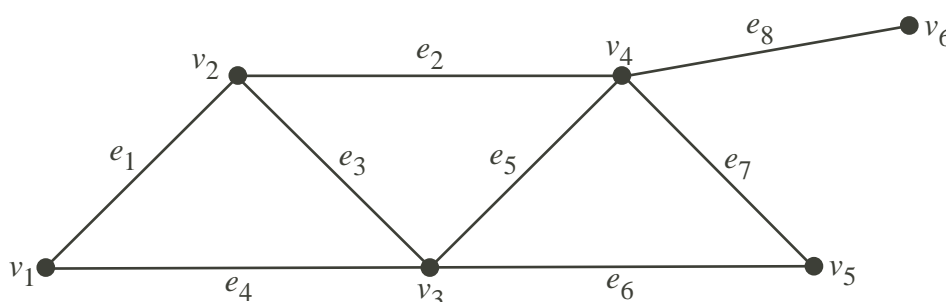
Yhtenäisen graafin $G = (V, E)$ irrotusjoukko on sellainen viivojen joukko $F \subseteq E$, että

1. $G - F$ (poistetaan F :n viivat yksi kerrallaan) ei ole yhtenäinen ja
2. $G - H$ on yhtenäinen aina, kun $H \subset F$.

Lause 1.9. Jos F on yhtenäisen graafin G irrotusjoukko, niin $G - F$:ssä on kaksi komponenttia.

Todistus. Olkoon $F = \{e_1, \dots, e_k\}$. Graafi $G - \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ on yhtenäinen (ja samoin G , jos $k = 1$) kohdan 2. nojalla. Viivan poisto yhtenäisestä graafista jakaa sen (enintään) kahteen komponenttiin. □

Esimerkki. Graafin



irrotusjoukkoja ovat mm. $\{e_1, e_4\}$, $\{e_6, e_7\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_8\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\{e_2, e_5, e_7\}$, $\{e_2, e_5, e_6\}$ ja $\{e_2, e_3, e_4\}$. Onko niitä vielä muita?

Graafin $G = (V, E)$ irrotus on V :n jako (eli partitiio) kahteen erilliseen ei-tyhjään osajoukkoon V_1 ja V_2 :

$$V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad V_1 \neq \emptyset, \quad V_2 \neq \emptyset,$$

merkitään $\langle V_1, V_2 \rangle$. Yleensä irrotukset $\langle V_1, V_2 \rangle$ ja $\langle V_2, V_1 \rangle$ samaistetaan.

Esimerkki. (Jatkoa) $\langle \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\} \rangle$ on irrotus.

Vaihtoehtoisesti voidaan irrotusta ajatella viivojen joukkona:

$$\text{irrotus } \langle V_1, V_2 \rangle = \{\text{ne viivat, joiden yksi päätepiste on } V_1\text{:ssä ja toinen } V_2\text{:ssa}\}.$$

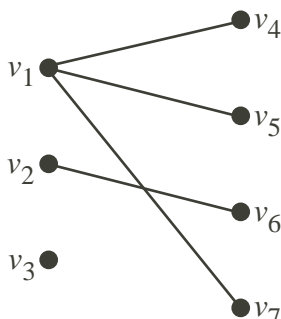
(Huom! Ko. viivojen joukko ei yleisesti määritä joukkoja V_1 ja V_2 yksikäsitteisesti, joten tätä ei voi käyttää irrotuksen määritelmänä.)

Seuraavat helposti todettavat tulokset yhdistävät edellä määritellyjä käsitteitä:

1. Yhtenäisen graafin G irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ (viivajoukoksi ajateltuna) on irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun V_1 :n ja V_2 :n indusoimat aligraafit ovat yhtenäiset, ts. $G - \langle V_1, V_2 \rangle$:ssa on kaksi komponenttia.
2. Jos F on yhtenäisen graafin G irrotusjoukko ja V_1 sekä V_2 ovat $G - F$:n kahden komponentin pistejoukot, niin $\langle V_1, V_2 \rangle$ on irrotus ja $F = \langle V_1, V_2 \rangle$.
3. Jos v on yhtenäisen (ei-triviaalin) graafin $G = (V, E)$ piste, niin $\langle \{v\}, V - \{v\} \rangle$ on G :n irrotus. Tällainen irrotus on irrotusjoukko, jos $V - \{v\}$:n indusoima aligraafi (eli $G - v$) on yhtenäinen, ts. jos v ei ole irrotuspiste.

Jos graafille $G = (V, E)$ on sellainen irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$, että $E = \langle V_1, V_2 \rangle$, ts. irrotus (viivajoukoksi ajateltuna) sisältää kaikki viivat, niin graafia G sanotaan *kaksijakoiseksi*.

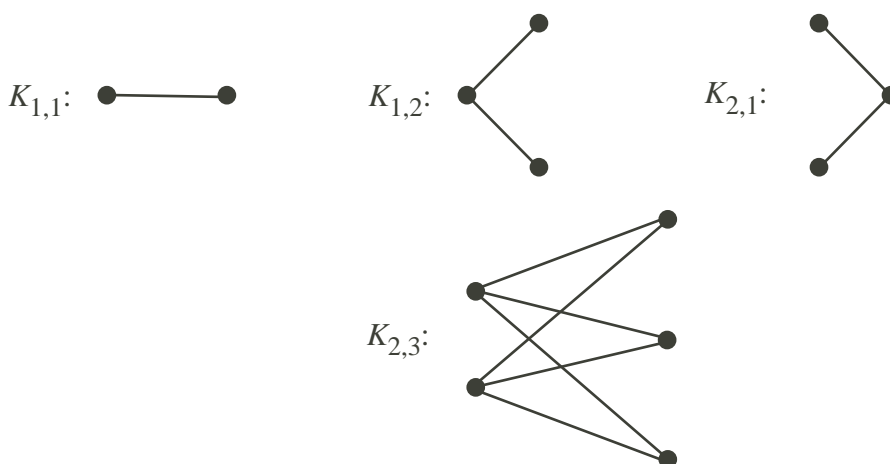
Esimerkki. Graafi



on kaksijakoinen, $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ja $V_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$.

Kaksijakoista yksinkertaista graafia sanotaan *täydelliseksi kaksijakoiseksi graafiksi*, jos kahtiajaon antavaan irrotukseen $\langle V_1, V_2 \rangle$ ei voida lisätä yhtään viivaa, ts. graafin viivat ovat tarkalleen kaikki viivat, joiden yksi päätepiste on V_1 :ssä ja toinen V_2 :ssa. Mikäli V_1 :ssä on n pistettä ja V_2 :ssa m pistettä, merkitään tällaista graafia $K_{n,m}$:llä (vrt. täydellinen graafi).

Esimerkki.



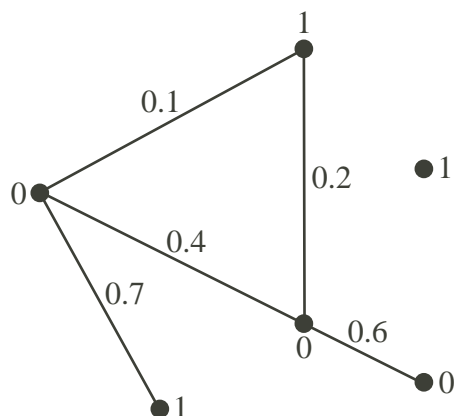
(Yleensä $K_{n,m}$ ja $K_{m,n}$ samaistetaan.)

1.5 Merkityt graafit. Isomorfismi

Graafin $G = (V, E)$ *pisteiden merkinnällä* tarkoitetaan kuvausta $\alpha : V \rightarrow A$, missä A on ns. *merkkien joukko*. Vastaavasti *viivojen merkintä* on kuvaus $\beta : E \rightarrow B$, missä B on merkkien joukko. Usein merkit ovat lukuja, jolloin puhutaan myös pisteiden tai viivojen *painotuksesta* ja *painoista*. Viivapainotetussa graafissa *polun paino* on sen viivojen painojen summa.

Pisteiden (vast. viivojen) merkintä on *injektiivinen*, jos kahdella eri pisteellä (vast. viivalla) ei ole samaa merkkiä. Injektiivinen merkintä on *bijektiivinen*, jos A :ssa (vast. B :ssä) on merkkejä yhtä monta kuin on pisteitä (vast. viivoja).

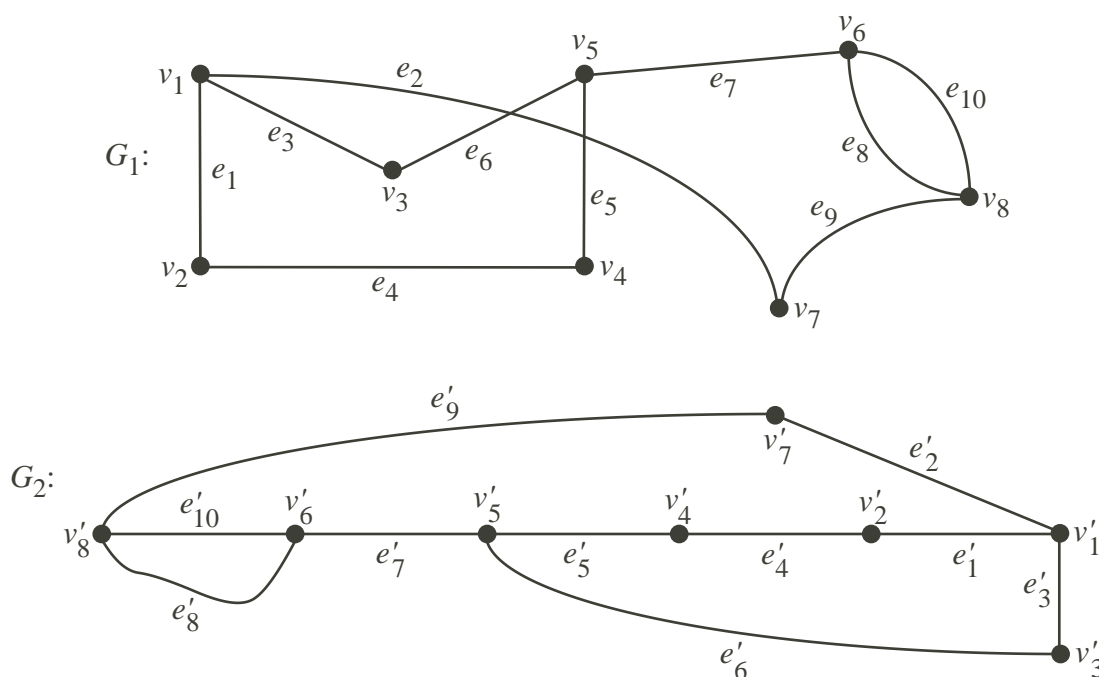
Esimerkki. Jos $A = \{0, 1\}$ ja $B = \mathbb{R}$, niin graafin



viivojen merkintä (painotus) on injektiivinen, pisteiden ei.

Graafit $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ ovat isomorfiset, jos G_1 :n pisteet voidaan merkitä bijektiivisesti V_2 :n alkiolla siten, että saadaan G_2 . (Huom! Viivojen multiplisiteetit tulee säilyttää.)

Esimerkki. Alla olevat graafit G_1 ja G_2 ovat isomorfiset ja isomorfismin antaa merkintä $v_i \mapsto v'_i$ ja viivojen vastaavuuden $e_j \mapsto e'_j$.



Kahden eri tavalla annetun graafin isomorfisuuden selvittäminen on tunnettu tehtävä, jonka tehokkaaksi ratkaisemiseksi on tehty paljon työtä. Se poikkeaa kuitenkin melkoisesti muista graafi- ja verkkoteoreettisista probleemoista ja liittyy paljolti algebraan (ryhmäteoriaan). Graafi-isomorfismiprobleemalla on myös tärkeä asema laskennallisen vaativuuden teoriassa. Ks. esimerkiksi KÖBLER, J. & SCHÖNING, U. & TORÁN, J.: *The Graph Isomorphism Problem. Its Structural Complexity*. Birkhäuser (1993).

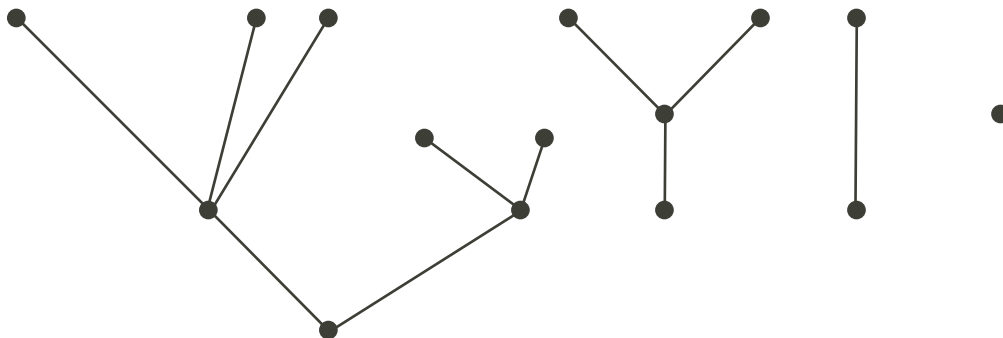
Luku 2

PUUT

2.1 Puut. Metsät

Metsä on piiritön graafi. *Puu* on yhtenäinen metsä. Metsän *alimetsä* on sen aligraafi. Metsän yhtenäinen aligraafi on sen *alipuu*. Yleisesti, minkä tahansa graafin alimetsä (vast. alipuu) on sen aligraafi, joka on metsä (vast. puu).

Esimerkki. Neljä puuta, jotka yhdessä muodostavat metsän:



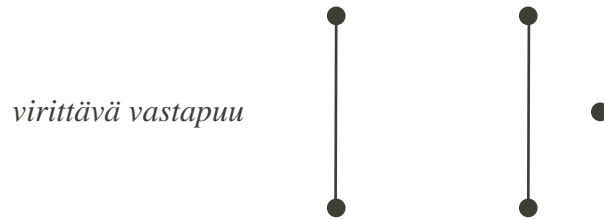
Yhtenäisen graafin *virittävä puu* on sen alipuu, joka sisältää kaikki graafin pisteet. Jos T on graafin G virittävä puu, niin

$$G - T =_{\text{merk.}} T^*$$

on sen *virittävä vastapuu*.

Esimerkki.





Virittävän puun viivoja sanotaan *oksiksi* ja virittävän vastapuun viivoja *siteiksi*.

Lause 2.1. Jos graafissa G on n pistettä ja m viivaa, niin seuraavat ehdot ovat keskenään ekvivalentit:

- (i) G on puu.
- (ii) Jokaisen kahden eri G :n pisteen välillä on tarkalleen yksi polku ja G :ssä ei ole silmukoita.
- (iii) G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.
- (iv) G on piiritön ja $m = n - 1$.
- (v) G on piiritön ja lisäämällä G :hen mikä tahansa uusi viiva syntyy graafi, jossa on tarkalleen yksi piiri.

Todistus. (i) \Rightarrow (ii): Jos G on puu, niin se on yhtenäinen ja piiritön. G :ssä ei siis ole silmukoita. Jokaista kahta eri G :n pistettä yhdistää polku. Lauseen 1.6 nojalla tällaisia polkuja on vain yksi.

(ii) \Rightarrow (iii): G on yhtenäinen. Käytetään induktiota m :n suhteen.

Induktio-alkutila: Nyt $m = 0$, G on triviaali ja asia on selvä.

Induktio-oletus: $m = n - 1$, kun $m \leq l$. ($l \geq 0$)

Induktioväite: $m = n - 1$, kun $m = l + 1$.

Induktioväitteen todistus: G :ssä on viiva e . $G - e$:ssä on l viivaa. Jos $G - e$ on yhtenäinen, e :n päätepisteiden välillä on kaksi eri polkua eikä (ii) ole voimassa. Näin ollen $G - e$:ssä on kaksi komponenttia G_1 ja G_2 . Olkoot G_1 :ssä n_1 pistettä ja m_1 viivaa, vastaavasti G_2 :ssa n_2 pistettä ja m_2 viivaa. Silloin

$$n = n_1 + n_2 \quad \text{ja} \quad m = m_1 + m_2 + 1.$$

Induktio-oletuksen nojalla

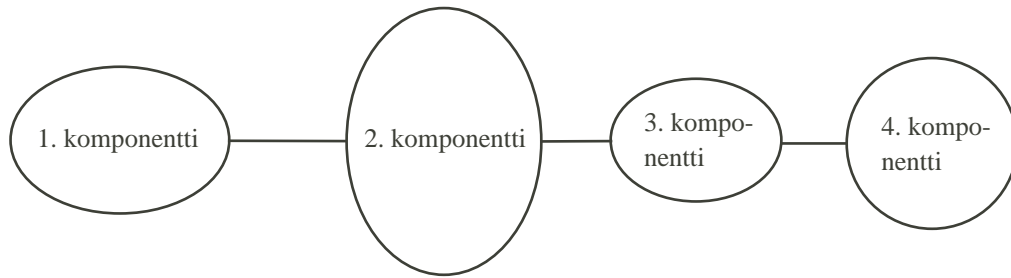
$$m_1 = n_1 - 1 \quad \text{ja} \quad m_2 = n_2 - 1,$$

joten $m = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$.

(iii) \Rightarrow (iv): Asetetaan vastaoletus: G :ssä on piiri. Olkoon e jokin ko. piirin viiva. Silloin $G - e$ on yhtenäinen ja siinä on n pistettä sekä $n - 2$ viivaa. $\sqrt{^1}$

(iv) \Rightarrow (v): Jos G on piiritön, siinä ei ole kahta eri pistettä yhdistäviä polkuja kuin enintään yksi (Lause 1.6). Jos G :ssä olisi useampia komponentteja, niin asettamalla viiva kahden eri komponentin välille ei syntyisi piiriä. Lisäämällä viivoja voidaan komponentit yhdistää aikaansaamatta piirejä:

¹Yhtenäisessä n -pisteisessä graafissa on vähintään $n - 1$ viivaa (Lause 1.4).



Jos lisättiin viivoja $k (\geq 1)$ kpl, olisi (sillä (i) \Rightarrow (iii))

$$m + k = n - 1 \quad (\checkmark, \text{koska } m = n - 1).$$

Siis G on yhtenäinen. Lisäämällä uusi viiva kahden ei-vierekkäisen pisteen välille syntyy näin ollen yksi piiri, mutta ei useampia (muussa tapauksessa voitaisiin yhdestä piiristä poistaa viiva toisen piiriin jäädessä ”ehjäksi” ja graafin yhtenäiseksi, mikä on vastoin päättelyä (iii) \Rightarrow (iv)). Samoin rinnakkaisen viivan tai silmukan lisääminen aikaansaa tarkalleen yhden piirin.

(v) \Rightarrow (i): Asetetaan vastaoletus: G ei ole puu, ts. se ei ole yhtenäinen. Lisäämällä viivoja kuten edellisessä kohdassa (kuvio) ei synny piirejä. \checkmark □

Erityisesti Lause 2.1 pätee virittäville puille.

Lause 2.2. *Yhtenäisellä graafilla on virittävä puu.*

Todistus. Tarkastellaan yhtenäistä graafia G , jolla on n pistettä ja m viivaa. Jos $m = n - 1$, on G itse puu. Koska G on yhtenäinen, on $m \geq n - 1$ (Lause 1.4). Jäljelle jää tapaus $m \geq n$, jolloin G :ssä on piiri. Poistetaan ko. piiristä yksi viiva e . $G - e$ on yhtenäinen. Toistetaan tätä kunnes viivoja on $n - 1$ kpl. Silloin jäljellä on puu. □

Huomautus. *Itse asiassa yhtenäisen graafin virittävä puu voidaan muodostaa lähtien sen mielivaltaisesta alimetsästä M , aivan kuten edellisessä todistuksessa: Koska minkään piiriin kaikki viivat eivät ole M :ssä, poistetaan piiristä juuri sellainen viiva, joka ei ole M :ssä.*

Lauseen 2.1 nojalla n -pisteisen graafin G aligraafi G_1 on G :n virittävä puu (jolloin siis G on yhtenäinen), jos sillä on mitkä tahansa kolme seuraavasta neljästä ominaisuudesta:

1. G_1 :ssä on n pistettä.
2. G_1 on yhtenäinen.
3. G_1 :ssä on $n - 1$ viivaa.
4. G_1 on piiritön.

Itse asiassa 3. ja 4. riittävät yhdessäkin takaamaan, että G_1 on virittävä puu. Jos nimittäin 3. ja 4. ovat voimassa, mutta G_1 olisi epäyhtenäinen, olisivat G_1 :n komponentit puita ja G_1 :ssä olisi viivoja yhteensä

$$\text{pisteiden lkm} - \text{komponenttien lkm} < n - 1$$

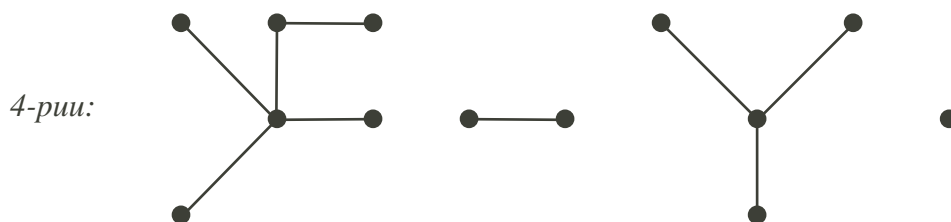
kappaletta (\checkmark).

Lause 2.3. *Jos puu ei ole triviaali, niin siinä on ainakin kaksi loppupistettä.*

Todistus. Jos puussa on $n (\geq 2)$ pistettä, on sen pisteiden asteiden summa $2(n-1)$. Jos jokaisen pisteen aste olisi ≥ 2 , olisi ko. summa $\geq 2n$ (\surd). Jos taas vain yhden pisteen aste on yksi muiden pisteiden asteiden ollessa ≥ 2 , olisi ko. summa $\geq 1 + 2(n-1) = 2n-1$ (\surd). (Tulos seuraa myös Lauseesta 1.8, sillä puun irrotuspiste ei ole loppupiste!) \square

Metsää, jossa on k komponenttia, kutsutaan usein k -puuksi. (Siis 1-puu on puu.)

Esimerkki.

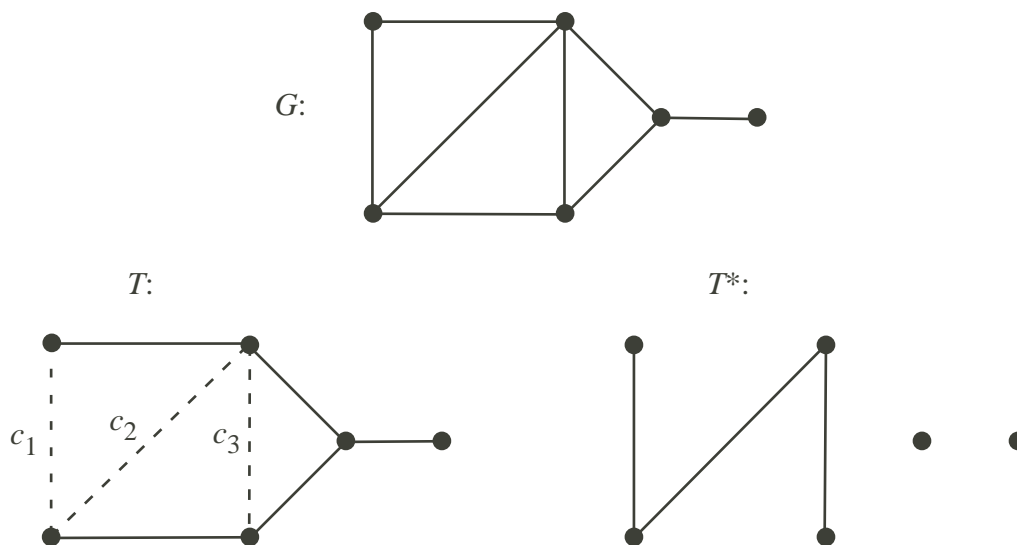


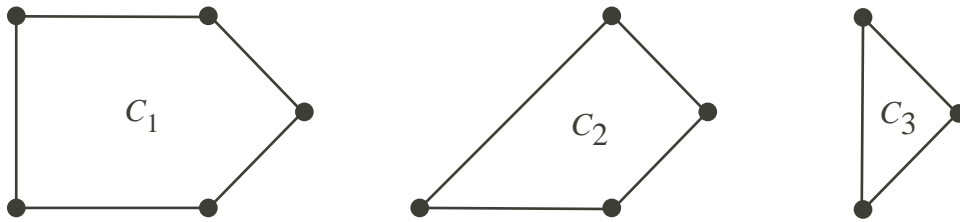
k -komponenttisella graafilla on Lauseen 2.1 nojalla (sovelletaan komponentteihin) *virittävä k -puu* eli *virittävä metsä*, jossa on k komponenttia.

2.2 (Perus)piirit. (Perus)irrotusjoukot

Jos yhtenäisen graafin G virittävän puun T oksat ovat b_1, \dots, b_{n-1} ja vastaavan virittävän vastapuun T^* siteet c_1, \dots, c_{m-n+1} , niin graafissa $T + c_i$ (= T :n oksien ja c_i :n indusoima G :n aligraafi) on tarkalleen yksi piiri C_i (Lause 2.1). Tällaisia piirejä kutsutaan *peruspiireiksi*. Kukin virittävä puu määrittää tällä tavoin $m - n + 1$ peruspiiriä C_1, \dots, C_{m-n+1} , jotka yhdessä muodostavat ns. *peruspiirijoukon*. Jokaisessa peruspiirissä on tarkalleen yksi side, joka toisaalta ei esiinny missään muussa peruspiirijoukon peruspiirissä. Näin ollen ei mitään peruspiiriä voida lausua peruspiirijoukon toisten peruspiirien rengassummana, ts. peruspiirijoukko on rengassumman suhteen (linearisesti) riippumaton.

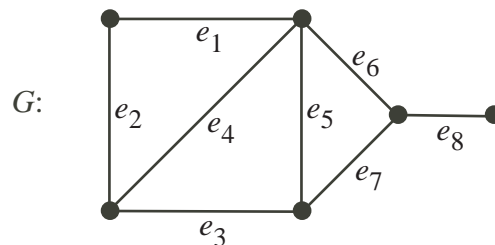
Esimerkki.



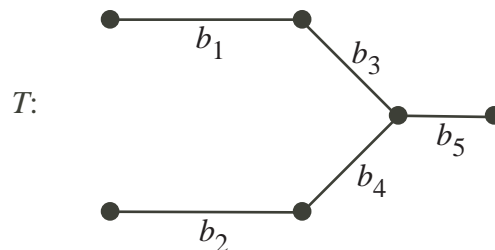


$T - b_i$:ssä on kaksi komponenttia T_1 ja T_2 . Vastaavat pistejoukot ovat V_1 ja V_2 . Silloin $\langle V_1, V_2 \rangle$ on G :n irrotus. Se on (viivajoukoksi tulkittuna) myös G :n irrotusjoukko, sillä $G - \langle V_1, V_2 \rangle$:ssä on kaksi komponenttia (ks. tulos 1. sivulla 16). Näin jokaista T :n oksaa b_i vastaa irrotusjoukko I_i . Tällä tavoin saadut irrotusjoukot I_1, \dots, I_{n-1} ovat ns. *perusirrotusjoukot* ja ne muodostavat ns. *perusirrotusjoukkojen joukon*. Jokainen perusirrotusjoukko sisältää tarkalleen yhden T :n oksista ja jokainen T :n oksa on tarkalleen yhdessä perusirrotusjoukossa. Kukin virittävä puu määrittää näin yksikäsitteisen G :n perusirrotusjoukkojen joukon.

Esimerkki. (Jatkoa) Edellisen esimerkin graafin



virittävän puun



määrittämät perusirrotusjoukot ovat:

$$\begin{aligned} b_1 &: \{e_1, e_2\} & b_2 &: \{e_2, e_3, e_4\} & b_3 &: \{e_2, e_4, e_5, e_6\} \\ b_4 &: \{e_2, e_4, e_5, e_7\} & b_5 &: \{e_8\} \end{aligned}$$

Katsotaan seuraavaksi paria piirien ja irrotusjoukkojen ominaisuutta:

- (a) Yhtenäisen graafin G irrotusjoukko sisältää ainakin yhden oksan jokaisesta G :n virittävästä puusta. (Vastaoletus: G :n eräs irrotusjoukko F ei sisällä yhtään erään virittävän puun T oksaa. Silloin T on $G - F$:n aligraafi ja $G - F$ onkin yhtenäinen. \checkmark)
- (b) Yhtenäisen graafin G piiri sisältää ainakin yhden siteen jokaisesta G :n virittävästä vastapuusta. (Vastaoletus: G :n eräs piiri C ei sisällä yhtään erään virittävän vastapuun T^* sidettä. Silloin $T = G - T^*$ sisältää piirin eikä T näin ollen ole puu. \checkmark)

Lause 2.4. *Yhtenäisen graafin G viivajoukko F on G :n irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun*

- (i) F sisältää ainakin yhden oksan jokaisesta G :n virittävästä puusta ja,
- (ii) jos $H \subset F$, niin jonkin virittävän puun mikään oksa ei ole H :ssa.

Todistus. Otetaan ensin tapaus, jossa F on irrotusjoukko. Silloin (i) on voimassa (ominaisuus (a) yllä). Jos $H \subset F$, niin $G - H$ on yhtenäinen ja sillä on virittävä puu T . Toisaalta T on silloin myös G :n virittävä puu. Siis myös (ii) pätee.

Otetaan sitten tapaus, jossa (i) ja (ii) ovat voimassa. Silloin $G - F$ on epäyhtenäinen. Jos $H \subset F$, niin jonkin G :n virittävän puun T mikään oksa ei ole H :ssa, T on $G - H$:n aligraafi ja $G - H$ on yhtenäinen. Siis F on irrotusjoukko. \square

Vastaava tulos piireille:

Lause 2.5. *Yhtenäisen graafin G aligraafi C on piiri täsmälleen silloin, kun*

- (i) C sisältää siteen jokaisesta G :n virittävästä vastapuusta ja,
- (ii) jos D on C :n aligraafi ja $D \neq C$, niin jonkin virittävän vastapuun mikään side ei ole D :ssä.

Todistus. Otetaan ensin tapaus, jossa C on piiri. Silloin C sisältää siteen jokaisesta virittävästä vastapuusta (ominaisuus (b) yllä), joten (i) on voimassa. Jos D on C :n aito aligraafi, niin ilmeisesti se ei sisällä piirejä, ts. se on metsä. Silloin D voidaan täydentää G :n virittäväksi puuksi T (ks. huomautus s. 21) eikä siis sisällä yhtään T^* :n sidettä. Näin ollen myös (ii) pätee.

Otetaan sitten tapaus, jossa (i) ja (ii) ovat voimassa. Silloin C :ssä täytyy olla piirejä, muussa tapauksessa se olisi metsä ja täydennettävissä G :n virittäväksi puuksi (ks. huomautus s. 21). Otetaan jokin C :n piiri C' . Koska (ii) pätee, ei voi olla $C' \neq C$, sillä piirinä C' sisältää siteen jokaisesta virittävästä vastapuusta (ominaisuus (b) yllä). Siis $C = C'$ on piiri. \square

Lause 2.6. *Yhtenäisen graafin piirillä ja irrotusjoukolla on aina parillinen määrä yhteisiä viivoja.*

Todistus. Otetaan yhtenäisen graafin G piiri C ja irrotusjoukko F . $G - F$:ssä on kaksi komponenttia $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$. Jos nyt C on G_1 :n tai G_2 :n aligraafi, on asia selvä (yhteisiä viivoja ei ole). Oletetaan sitten, että C :llä ja F :llä on yhteisiä viivoja. Kuljetaan piiri lähtien jostakin G_1 :n pisteestä v . Koska lopulta palataan v :hen, on C :ssä oltava parillinen määrä irrotuksen $\langle V_1, V_2 \rangle$ viivoja. \square

Seuraavaa lausetta pitänee lukea useampia kertoja ennenkuin se avautuu:

Lause 2.7. *Yhtenäisen graafin G virittävän vastapuun T^* sidettä c vastaava peruspiiri muodostuu tarkalleen niistä T :n oksista, joita vastaava perusirrotusjoukko sisältää c :n.*

Todistus. T^* :n sidettä c vastaa jokin peruspiiri C . Muut C :n viivat b_1, \dots, b_k ovat T :n oksia. Merkitään I_i :llä oksaa b_i vastaavaa perusirrotusjoukkoa. Silloin b_i on ainoa C :n ja I_i :n yhteinen T :n oksa. Toisaalta c on ainoa T^* :n side C :ssä. Lauseen 2.6 nojalla on C :n ja I_i :n yhteisten viivojen oltava b_i ja c , ts. c on I_i :n viiva. Näytetään sitten, että muita T :n oksia b_{k+1}, \dots, b_{n-1} vastaavissa perusirrotusjoukoissa I_{k+1}, \dots, I_{n-1} ei ole sidettä c . Jos esimerkiksi I_{k+1} :ssä olisi side c , olisi perusirrotusjoukolla I_{k+1} ja piirillä C tarkalleen yksi yhteinen viiva (\surd). Siis side c on vain perusirrotusjoukoissa I_1, \dots, I_k . \square

Vastaava perusirrotusjoukkoja koskeva lause on pätee jälleen:

Lause 2.8. *Yhtenäisen graafin virittävän puun T oksaa b vastaava perusirrotusjoukko muodostuu tarkalleen niistä T^* :n siteistä, joita vastaava peruspiiri sisältää b :n.*

Todistus. T :n oksaa b vastaa jokin perusirrotusjoukko I . Muut I :n viivat ovat c_1, \dots, c_k ovat T^* :n siteitä. Merkitään C_i :llä sidettä c_i vastaavaa peruspiiriä. Silloin c_i on ainoa I :n ja C_i :n yhteinen T^* :n side. Toisaalta b on ainoa T :n oksa I :ssä. Lauseen 2.6 nojalla on I :n ja C_i :n yhteisten viivojen oltava b ja c_i , ts. b on C_i :n viiva. Näytetään sitten, että muita T^* :n siteitä $c_{k+1}, \dots, c_{m-n+1}$ vastaavissa peruspiireissä $C_{k+1}, \dots, C_{m-n+1}$ ei ole oksaa b . Jos esimerkiksi C_{k+1} :ssä olisi oksa b , olisi peruspiirillä C_{k+1} ja irrotusjoukolla I tarkalleen yksi yhteinen viiva (\surd). Siis oksa on vain peruspiireissä C_1, \dots, C_k . \square

Näistä tuloksista on jo havaittavissa graafin irrotusjoukkojen ja piirien välinen duaalisuus: Irrotusjoukkoja koskevista tuloksista saadaan yleensä vastaava piirejä koskeva duaalinen tulos, ja kääntäen. Siirtyminen tuloksesta vastaavaan duaaliseen tulokseen on usein suoritettavissa melkein mekaanisesti, ja sama koskee myös todistuksia! Tämä duaalisuus tulee erityisellä tavalla esille ja käyttöön ns. matroidien yhteydessä (ks. Luku 7).

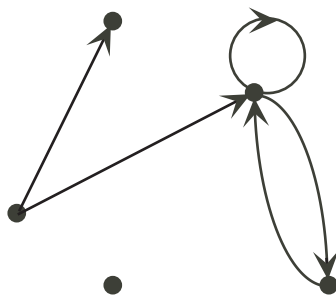
Luku 3

SUUNNATUT GRAAFIT

3.1 Määritelmiä

Intuitiivisesti suunnattu graafi eli digraafi muodostuu pisteistä ja niitä yhdistävistä suunnatuista viivoista eli nuolista.

Esimerkki.



Formaalisesti digraafi on pari (V, E) , missä V on pisteiden joukko ja E on pisteparien joukko kuten ”tavallisillekin” graafeille. Erona on, että nyt E :n alkiot katsotaan järjestetyiksi pareiksi: Nuolta pisteestä u pisteeseen v merkitään parilla (u, v) , kun taas pari (v, u) merkitsee nuolta v :stä u :hun. Myös nuolien multiplisiteetti otetaan mukaan. (Silmukan suunnalla ei ole väliä.)

Luvun 1 käsitteet siirtyvät paljolti samanlaisina digraafeille. Huomattakoon seuraavat:

1. Nuolen (u, v) alkupiste on u ja loppupiste v . Myös sanotaan, että nuoli lähtee pisteestä u ja tulee pisteeseen v .
2. Pisteen v lähtöaste on siitä lähtevien nuolten lukumäärä (merkitään $d^+(v)$) ja sen tuloaste on siihen tulevien nuolten lukumäärä (merkitään $d^-(v)$).
3. Suunnatussa kulussa (reitissä, polussa, piirissä)

$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k}$$

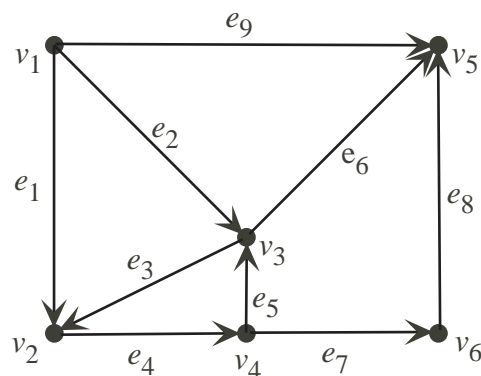
on e_{j_ℓ} :n alkupisteen oltava $v_{i_{\ell-1}}$ ja loppupisteen v_{i_ℓ} .

4. Digraafin $G = (V, E)$ alusgraafi on (V, E) tulkittuna ”tavalliseksi” suuntaamattomaksi graafiksi, merkitään G_u .
5. Digraafi G on yhtenäinen, jos G_u on yhtenäinen. G :n komponentit ovat G_u :n komponentteja vastaavat suunnatut G :n aligraafit. G :n pisteet ovat yhdistetyt, jos ne ovat yhdistetyt G_u :ssa. Myös muut suuntaamattomien graafien käsitteet ja tulokset siirtyvät digraafeille alusgraafien kautta.

6. Digraafin kahden pisteen u ja v sanotaan olevan *vahvasti yhdistetyt*, jos G :ssä on suunnattu $u-v$ -polku ja myös suunnattu $v-u$ -polku.
7. Digraafi G on *vahvasti yhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi eri pistettä ovat vahvasti yhdistetyt. Erityisesti triviaali digraafi on vahvasti yhtenäinen.
8. Digraafin G *vahva komponentti* on sellainen G :n suunnattu aligraafi H (ei nollagraafi), että H on vahvasti yhtenäinen, mutta kadottaa tämän ominaisuutensa, jos siihen lisätään uusia G :n pisteitä tai/ja nuolia.

Jokainen digraafin G piste on jossakin G :n vahvassa komponentissa (vrt. Lause 1.3). Sen sijaan G :n nuolen ei välttämättä tarvitse kuulua yhteenkään vahvaan komponenttiin.

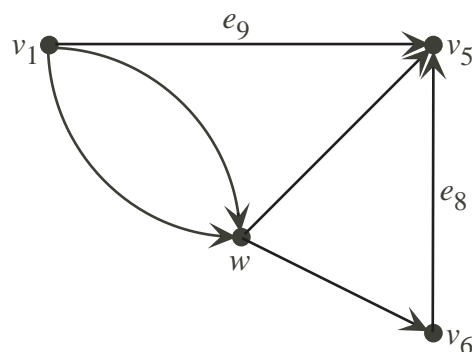
Esimerkki. Digraafin G



vahvat komponentit ovat $(\{v_1\}, \emptyset)$, $(\{v_2, v_3, v_4\}, \{e_3, e_4, e_5\})$, $(\{v_5\}, \emptyset)$ ja $(\{v_6\}, \emptyset)$.

Digraafin G tiivistys on digraafi, joka saadaan kutistamalla G :n kunkin vahvan komponentin nuolet, merkitään G_c .

Esimerkki. (Jatkoa) Tiivistetään:



3.2 Suunnatut puut

Suunnattu graafi on *kvasivahvasti yhtenäinen*, jos sen jokaiselle pisteparille u ja v jokin seuraavista vaihtoehdoista on voimassa:

- (i) $u = v$ tai

- (ii) digraafissa on suunnattu $u-v$ -polku tai
- (iii) digraafissa on suunnattu $v-u$ -polku tai
- (iv) on sellainen piste w , että digraafissa on sekä suunnattu $w-u$ -polku että suunnattu $w-v$ -polku.

Esimerkki. (Jatkoa) Digraafi G on kvasivahvasti yhtenäinen.

Kvasivahvasti yhtenäinen digraafi on yhtenäinen, mutta ei välttämättä vahvasti yhtenäinen.

Digraafin G piste v on G :n juuri, jos siitä on suunnattu polku jokaiseen toiseen G :n pisteeseen.

Esimerkki. (Jatkoa) Digraafin G ainoa juuri on v_1 .

Lause 3.1. Digraafissa on juuri(a) tarkalleen silloin, kun se on kvasivahvasti yhtenäinen.

Todistus. Jos digraafissa on juuri, se ilmeisesti on kvasivahvasti yhtenäinen määritelmän mukaan.

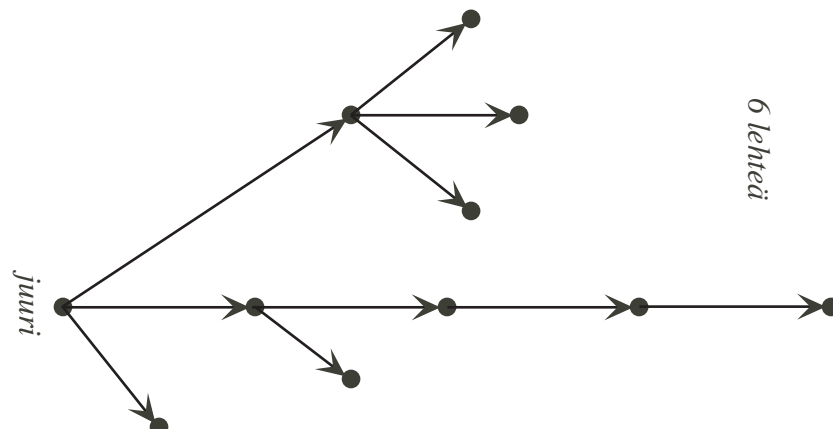
Otetaan sitten kvasivahvasti yhtenäinen digraafi G ja näytetään, että siinä on juuri. Asia on selvä, jos G on triviaali. Muussa tapauksessa otetaan tarkasteltavaksi G :n pistejoukko $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, jossa siis $n \geq 2$. Seuraava menettely tuottaa nyt G :lle juuren:

1. Asetetaan $P \leftarrow V$.
2. Jos P :n kahden eri pisteen u ja v välillä on suunnattu $u-v$ -polku, poistetaan P :stä v eli asetetaan $P \leftarrow P - \{v\}$. Toistetaan tätä niin monta kertaa kuin mahdollista.
3. Jos P :ssä on yksi piste, on tämä juuri. Muussa tapauksessa on P :ssä (ainakin) kaksi eri pistettä u ja v eikä näiden välillä ole suunnattua polkua kumpaankaan suuntaan. Koska G on kvasivahvasti yhtenäinen, on kohdan (iv) mukaan piste w ja sekä $w-u$ -polku että $w-v$ -polku. Koska u on P :ssä, ei w voi olla siinä. Poistetaan P :stä u ja v ja lisätään sinne w , ts. asetetaan ensin $P \leftarrow P - \{u, v\}$ ja sitten $P \leftarrow P \cup \{w\}$. Mennään kohtaan 2.
4. Toistetaan niin monta kertaa kuin mahdollista.

Joka kierroksella P :n pisteiden lukumäärä vähenee. Menettely tuottaa lopulta juuren, sillä jokaiseen P :stä poistettuun pisteeseen on aina suunnattu polku jostain siihen jääneestä pisteestä. □

Digraafi G on *puu*, jos G_u on puu, ja *suunnattu puu*, jos se on lisäksi kvasivahvasti yhtenäinen eli sillä on juuri. Pisteitä, joiden lähtöaste on nolla, sanotaan suunnatun puun *lehdeksi*.

Esimerkki.



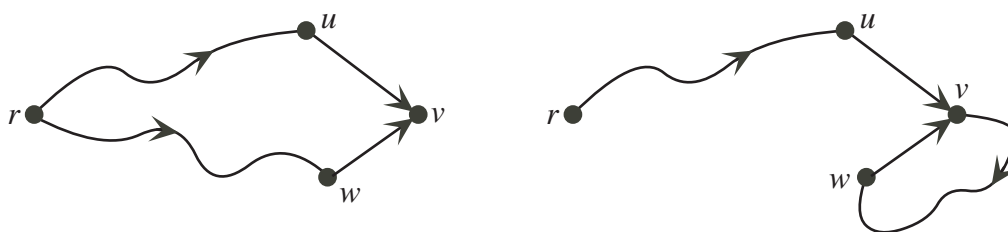
Lause 3.2. Digraafille G , jossa on $n > 1$ pistettä, seuraavat ehdot ovat keskenään ekvivalentit:

- (i) G on suunnattu puu.
- (ii) G on puu ja siinä on piste, josta on (tarkalleen yksi) suunnattu polku jokaiseen toiseen G :n pisteeseen.
- (iii) G on kvasivahvasti yhtenäinen, mutta $G - e$ ei ole kvasivahvasti yhtenäinen millekään G :n nuolelle e .
- (iv) G on kvasivahvasti yhtenäinen ja sillä on piste, jonka tuloaste on nolla kaikkien muiden pisteiden tuloasteiden ollessa yksi.
- (v) G :ssä (eli siis G_u :ssa) ei ole piirejä ja siinä on piste, jonka tuloaste on nolla kaikkien muiden pisteiden tuloasteiden ollessa yksi.
- (vi) G on kvasivahvasti yhtenäinen eikä siinä (eli siis G_u :ssa) ole piirejä.

Todistus. (i) \Rightarrow (ii): Jos G on suunnattu puu, niin siinä on juuri. Juuresta on suunnattu polku jokaiseen toiseen G :n pisteeseen (mutta tällaisia ei voi olla useita, koska G_u on puu).

(ii) \Rightarrow (iii): Jos (ii) pätee, on G selvästi kvasivahvasti yhtenäinen. Asetetaan vastaoletus: On sellainen G :n nuoli e , että $G - e$ on kvasivahvasti yhtenäinen. e ei voi olla silmukka, koska G on puu. e :llä on päätepisteet u ja v . $G - e$:ssä ei voi olla suunnattua $u-v$ -polkua tai suunnattua $v-u$ -polkua (muussa tapauksessa G_u :ssa olisi piiri). Siispä on piste w , josta on sekä suunnattu $w-u$ -polku että suunnattu $w-v$ -polku. Mutta tällöin G :ssä olisi e :n suunnasta riippuen joko kaksi suunnattua $w-u$ -polkua tai kaksi suunnattua $w-v$ -polkua ja puussa G_u olisi piiri (\checkmark , Lause 1.6).

(iii) \Rightarrow (iv): Jos G on kvasivahvasti yhtenäinen, niin sillä on juuri r (Lause 3.1). Muiden pisteiden tuloasteet ovat näin ollen ≥ 1 . Asetetaan vastaoletus: On piste $v \neq r$, jolle $d^-(v) > 1$. Silloin v on kahden eri nuolen (u, v) ja (w, v) loppupiste. Jos G :ssä olisi silmukka e , olisi $G - e$ kvasivahvasti yhtenäinen (\checkmark). Näin ollen $u \neq v$ ja $w \neq v$. Nyt v :hen on r :stä kaksi suunnattua reittiä, yksi (u, v) :n kautta ja toinen (w, v) :n kautta. Mahdollisuuksia on kaksi:



Edellisessä $r-u$ -polku ja $r-w$ -polku eivät sisällä nuolia (u, v) ja (w, v) ja sekä $G - (u, v)$ että $G - (w, v)$ ovat kvasivahvasti yhtenäisiä. Jälkimmäisessä $r-u$ -polku sisältää nuolen (w, v) tai (kuten kuvassa) $r-w$ -polku sisältää nuolen (u, v) ja vain toinen graafeista $G - (u, v)$ ja $G - (w, v)$ on kvasivahvasti yhtenäinen. Joka tapauksessa siis joko $G - (u, v)$ tai $G - (w, v)$ on kvasivahvasti yhtenäinen, koska tällöinkin juuri on r (Lause 3.1). (\checkmark) Vielä on näytettävä, että $d^-(r) = 0$. Asetetaan taas vastaoletus: $d^-(r) \geq 1$. Silloin r on jonkin nuolen e loppupiste. Mutta tällöin $G - e$ on kvasivahvasti yhtenäinen, koska r on edelleen sen juuri (Lause 3.1). (\checkmark)

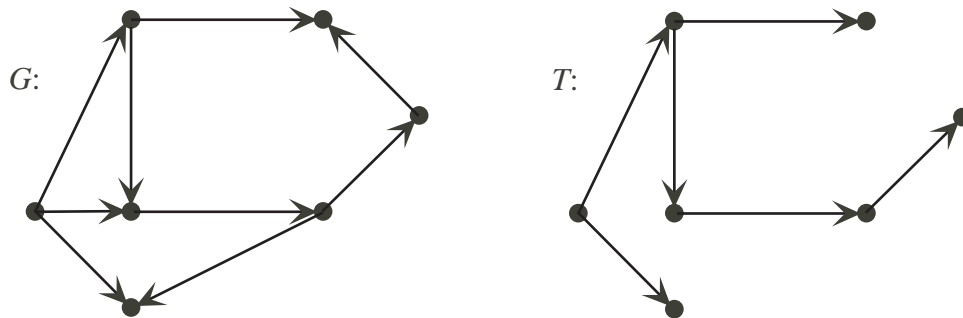
(iv) \Rightarrow (v): Jos (iv) pätee, riittää näyttää, että G_u :ssa ei ole piirejä. G :n pisteiden tuloasteiden summa on $n - 1$ ja näin ollen myös sen pisteiden lähtöasteiden summa on $n - 1$, ts. G :ssä on $n - 1$ nuolta. Koska G on kvasivahvasti yhtenäinen, se on yhtenäinen ja niin ollen puu (Lause 2.1). G_u :ssa ei näin ollen ole piirejä.

(v) \Rightarrow (vi): Oletetaan, että (v) voimassa. Silloin G :ssä on $n - 1$ nuolta (vrt. edellinen kohta). Lauseen 2.1 nojalla G on puu. Merkitään r :llä kohdassa (v) mainittua pistettä. Lauseen 2.1 nojalla r :stä on tarkalleen yksi polku mihin tahansa toiseen G :n pisteeseen. Mainitut polut ovat myös suunnattuja. Muussa tapauksessa $d^-(r) \geq 1$ tai jonkin polun pisteen tuloaste on > 1 tai polun jonkin muun pisteen kuin r :n tuloaste on nolla. Siis r on juuri ja G on kvasivahvasti yhtenäinen (Lause 3.1).

(vi) \Rightarrow (i): Jos G on kvasivahvasti yhtenäinen, sillä on juuri (Lause 3.1). Koska G on nyt yhtenäinen eikä siinä ole piirejä, se on puu. \square

Digraafin G suunnattu aligraafi T on G :n virittävä suunnattu puu, jos T on suunnattu puu ja sisältää kaikki G :n pisteet.

Esimerkki.



Lause 3.3. Digraafilla on virittävä suunnattu puu tarkalleen silloin, kun se on kvasivahvasti yhtenäinen.

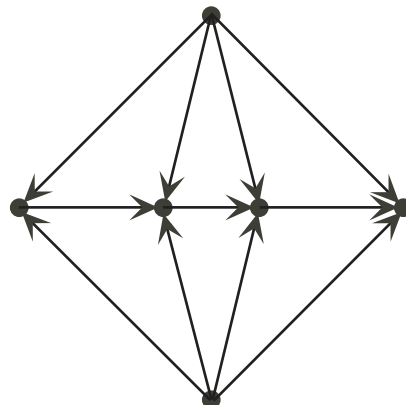
Todistus. Jos digraafilla G on virittävä suunnattu puu T , niin T :n juuri on myös G :n juuri ja G on kvasivahvasti yhtenäinen (Lause 3.1).

Oletetaan sitten, että G on kvasivahvasti yhtenäinen ja näytetään, että sillä on virittävä suunnattu puu. Asia on selvä, jos G itse on suunnattu puu. Ellei G ole suunnattu puu, on G :ssä Lauseen 3.2 nojalla nuoli e , jonka poisto ei hävitä G :n kvasivahvaa yhtenäisyyttä. Poistetaan järjestyksessä tällaisia nuolia, kunnes saadaan suunnattu puu. (Vrt. Lauseen 2.2 todistus.) \square

3.3 Asykliset suunnatut graafit

Suunnatun graafin suunnattua piiriä sanotaan *sykliseksi*. Suunnattu graafi on *asyklinen*, jos siinä ei ole syklejä. Ilmeisesti suunnatut puut ovat asyklisiä, mutta ei kääntäen.

Esimerkki. Digraafi



on asyklinen, muttei suunnattu puu.

Lause 3.4. *Asyklisellä digraafilla on piste, jonka tuloaste on nolla (ns. lähde), ja piste, jonka lähtöaste on nolla (ns. nielu).*

Todistus. Otetaan asyklinen digraafi G . Asia on selvä, ellei G :ssä ole nuolia. Muussa tapauksessa tarkastellaan G :n suunnattua polkua

$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k},$$

jolla on maksimipituus k . Koska G on asyklinen, on $v_{i_0} \neq v_{i_k}$. Jos nyt olisi nuoli (v, v_{i_0}) , niin jompikumpi seuraavista vaihtoehdoista olisi voimassa:

- $v \neq v_{i_t}$ kaikille indeksin arvoille $t = 0, \dots, k$. Silloin

$$v, (v, v_{i_0}), v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, v_{i_k}$$

olisi suunnattu polku, jonka pituus on $k + 1$. ✓

- $v = v_{i_t}$ jollekin indeksin t arvolle. Valitaan pienin tällainen t :n arvo. Silloin $t > 0$, koska G :ssä ei ole silmukoita, ja

$$v_{i_0}, e_{j_1}, v_{i_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_t}, v_{i_t}, (v, v_{i_0}), v_{i_0}$$

on suunnattu piiri. ✓

Siis $d^-(v_{i_0}) = 0$. Vastaavalla tavalla todetaan, että $d^+(v_{i_k}) = 0$. □

Jos $G = (V, E)$ on digraafi, jossa on n pistettä, niin G :n pisteiden injektiivistä merkintää $\alpha : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, joka toteuttaa ehdon $\alpha(u) < \alpha(v)$ aina, kun (u, v) on G :n nuoli, sanotaan G :n pisteiden *topologiseksi lajitelluksi* (tai *kanoniseksi merkinnäksi*).

Lause 3.5. *Suunnatun graafin pisteet voidaan lajitella topologisesti tarkalleen silloin, kun se on asyklinen.*

Todistus. Jos digraafissa on sykli, ei sen pisteitä ilmeisestikään voida lajitella topologisesti.

Jos taas digraafi G on asyklinen, saadaan sen pisteiden topologinen lajittelu seuraavalla menettelyllä¹

1. Valitaan piste v , jonka lähtöaste on nolla. Tällainen on olemassa Lauseen 3.4 nojalla. Asetetaan $\alpha(v) \leftarrow n$, $G \leftarrow G - v$ ja $n \leftarrow n - 1$.
2. Jos G :ssä on vain yksi piste v , asetetaan $\alpha(v) \leftarrow 1$. Muutoin palataan kohtaan 1.

□

¹Joka tunnetaan myös *Marimontin algoritmin* nimellä. Itse algoritmiin kuuluu muitakin osia. Alkuperäisviite on MARIMONT, R.B.: A New Method of Checking the Consistency of Precedence Matrices. *Journal of the Association for Computing Machinery* **6** (1959), 164–171.

Luku 4

GRAAFIEN MATRIISIT JA LINEAARIAVARUUDET

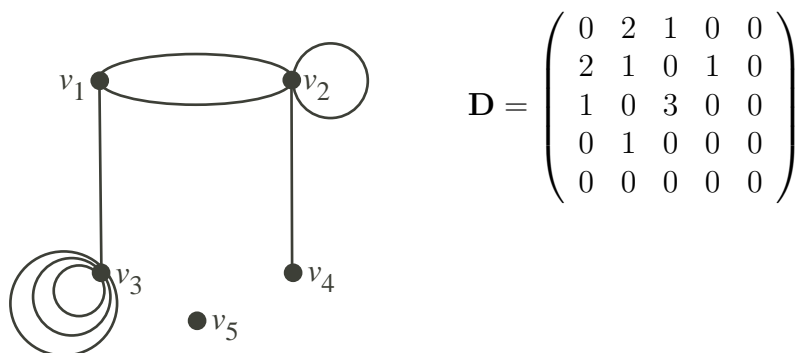
4.1 Graafien matriisiesityksiä

Graafin $G = (V, E)$ vieruspistematriisi on $n \times n$ -matriisi $\mathbf{D} = (d_{ij})$, missä n on G :n pisteiden lukumäärä, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ja

d_{ij} = pisteitä v_i ja v_j yhdistävien viivojen lukumäärä.

Erityisesti $d_{ij} = 0$, jos (v_i, v_j) ei ole G :n viiva. Matriisi \mathbf{D} on symmetrinen, ts. $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$.

Esimerkki.

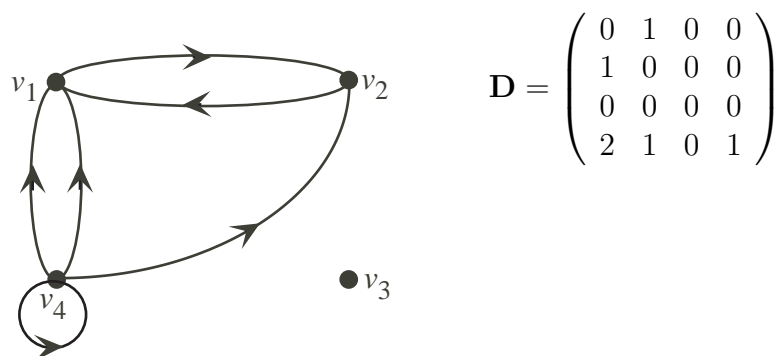


Ilmeisesti graafin vieruspistematriisi määrittää graafin täysin isomorfiaa vaille.

Suunnatulle graafille G vieruspistematriisi on $\mathbf{D} = (d_{ij})$, missä

d_{ij} = pisteestä v_i lähtevien ja pisteeseen v_j tulevien nuolten lukumäärä.

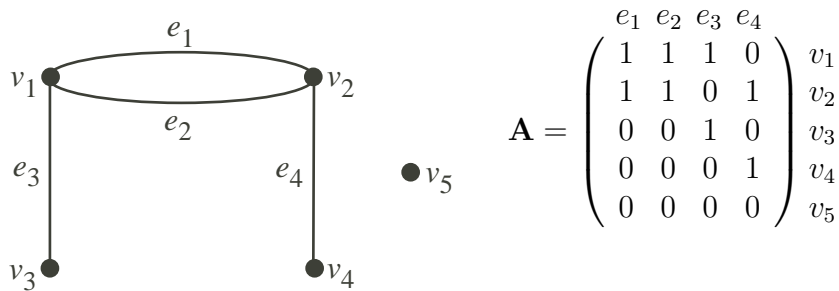
Esimerkki.



Ei-tyhjän silmukattoman graafin $G = (V, E)$ ns. *täysi insidenssmatriisi* on $n \times m$ -matriisi $\mathbf{A} = (a_{ij})$, missä n on G :n pisteiden lukumäärä, m on G :n viivojen lukumäärä ja

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } v_i \text{ on } e_j\text{:n päätepiste} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

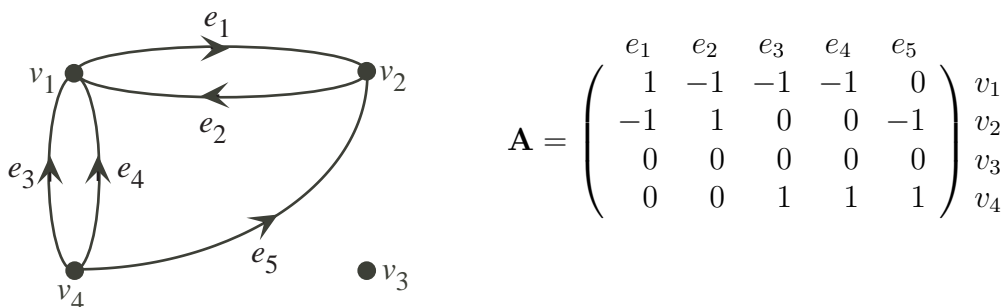
Esimerkki.



Ei-tyhjän silmukattoman suunnatun graafin G *täysi insidenssmatriisi* on $\mathbf{A} = (a_{ij})$, missä

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } v_i \text{ on } e_j\text{:n alkupiste} \\ -1, & \text{jos } v_i \text{ on } e_j\text{:n loppupiste} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Esimerkki.



Koska graafin täyden insidenssmatriisin jokainen sarake sisältää kaksi ykköstä muiden alkoiden ollessa nollia, voidaan ko. matriisista poistaa yksi rivi ja silti se määrää koko graafin. Graafin *insidenssmatriisi* onkin matriisi, joka saadaan poistamalla täydestä insidenssmatriisista yksi rivi. Insidenssmatriiseja on siis n kappaletta. Poistettua riviä vastaava piste on ns. *viitepiste*.

Vastaavasti suunnatun graafin täyden insidenssmatriisin jokainen sarake sisältää yhden $+1$:n ja yhden -1 :n loppujen alkoiden ollessa nollia. *Insidenssmatriisi* saadaan jälleen poistamalla viitepistettä vastaava rivi. Huomaa, että täyden insidenssmatriisin rivit ovat lineaarisesti riippuvat, sillä niiden summa on nollavektori.

Lause 4.1. *Ei-triviaalin puun insidenssmatriisin determinantti on ± 1 , myös jos puu on suunnattu graafi.*

Todistus. Käytetään induktiota puun pisteiden lukumäärän n suhteen.

Induktion lähtökohta: Nyt $n = 2$ ja asia on selvä.

Induktio-oletus: Lause on oikea, kun $n \leq k$. ($k \geq 2$)

Induktioväite: Lause on oikea, kun $n = k + 1$.

Induktioväitteen todistus: Otetaan puu T , jossa on pisteitä $k + 1$ kappaletta ja sen (mielivaltainen) insidenssimatriisi \mathbf{A} . T :llä on ainakin kaksi loppupistettä (Lause 2.3). Valitaan loppupiste v_i , joka ei ole \mathbf{A} :n viitepiste, ja viiva (nuoli) e_t , jonka päätepiste v_i on. Silloin

$$a_{it} = (\pm)1 \quad \text{ja} \quad a_{ij} = 0, \quad \text{kun } j \neq t.$$

Kehitetään \mathbf{A} :n determinanti $|\mathbf{A}|$ sen i :nnen rivin mukaan:

$$|\mathbf{A}| = (\pm)(-1)^{i+t}|\mathbf{A}'|,$$

missä \mathbf{A}' on a_{it} :tä vastaava alimatriisi. Merkitään $T' = T - v_i$, jolloin myös T' on puu (v_i oli loppupiste). Induktio-oletuksen nojalla $|\mathbf{A}'| = \pm 1$, sillä \mathbf{A}' on selvästi T' :n insidenssimatriisi. □

Seuraus. *Jos suunnatussa graafissa G ei ole silmukoita, sen täyden insidenssimatriisin rangi on $\rho(G)$.*

Todistus. G :n täyden insidenssimatriisin sarakkeiden ja rivien järjestäminen ei muuta sen rangia. Järjestetäänkin pisteet ja nuolet siten, että komponenttien pisteet ovat peräkkäin ja samoin komponenttien nuolet. Silloin täysi insidenssimatriisi muodostuu komponenttien täysistä insidenssimatriiseista:

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{\text{1. komponentti}} & & & \\ & \boxed{\text{2. komponentti}} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{\text{k:s komponentti}} \end{array} \right)$$

Merkitään i :nnen komponentin pisteiden lukumäärää n_i :llä. Jokaisella komponentilla on virittävä puu, jota vastaavan insidenssimatriisin determinantti on Lauseen 4.1 nojalla erisuuri kuin nolla, ts. ko. matriisi on täysiranginen. i :nnen komponentin täysi insidenssimatriisi saadaan vastaavasta virittävän puun insidenssimatriisista lisäämällä sarakkeita sekä lopuksi yksi aikaisemmista lineaarisesti riippuva rivi, joten sen rangi on sama kuin ko. virittävän puun insidenssimatriisin rangi ($= n_i - 1$). Huomaa erityisesti triviaalin komponentin tapaus: rangi on nolla $= 1 - 1$. Siis

$$\begin{aligned} \mathbf{A}:n \text{ rangi} &= \text{komponenttien rangien summa} \\ &= (n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) \\ &= \underbrace{n_1 + \dots + n_k}_{= n} - k = \rho(G). \end{aligned}$$

□

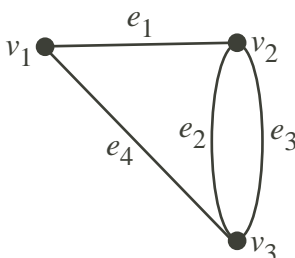
Huomautus. *Todistuksesta saadaan myös kannat täyden insidenssimatriisin sarakeavaruudelle ja riviavaruudelle: G :n virittävän metsän oksia vastaavat sarakkeet muodostavat sarakeavaruuden kannan. Riviavaruuden kanta puolestaan saadaan, kun jokaista komponenttia kohti poistetaan yksi ko. komponenttia vastaavista matriisin riveistä.*

4.2 Irrotusmatriisi

Jos ei-triviaalin ja silmukattoman graafin $G = (V, E)$ kaikki mahdolliset irrotukset ovat I_1, \dots, I_t , niin G :n *irrotusmatriisi* on $t \times m$ -matriisi $\mathbf{Q} = (q_{ij})$, missä m on G :n viivojen lukumäärä ja

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } e_j \in I_i \text{ (irrotus tulkitaan viivajoukoksi)} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Esimerkki. *Graafin*



irrotukset ovat $I_1 = \{e_1, e_4\}$, $I_2 = \{e_2, e_3, e_4\}$ ja $I_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$. *Irrotusmatriisi on*

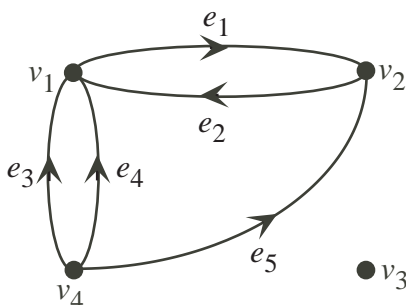
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ I_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ I_2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Huomautus. Jos graafissa on n pistettä, on sillä irrotuksia $\frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$ kappaletta. Vastaavia erilaisia viivajoukkoja ei yleensä ole näin paljoa. Irrotusmatriisiin otetaan mukaan vain yksi kappale kutakin viivajoukkoa vastaavista irrotuksista, jottei turhaan tulisi samoja rivejä. Irrotusmatriisissa on tällöinkin yleensä (liian) paljon rivejä.

Jos G on suunnattu graafi (ei-triviaali ja silmukaton), kiinnitetään jokaiselle irrotukselle $\langle V_1, V_2 \rangle$ (mielivaltaisesti valittu) *suunta*: $\langle V_1, V_2 \rangle$ on irrotus V_1 :stä V_2 :een. Ts. tarkastellaan ns. *suunnistettuja irrotuksia*, mutta valitaan vastakkaisuuntaisista irrotuksista kulloinkin vain toinen. Tällöin *irrotusmatriisissa* $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ on

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } e_j \in I_i \text{ ja } e_j \text{ sekä } I_i \text{ ovat samansuuntaisia} \\ -1, & \text{jos } e_j \in I_i \text{ ja } e_j \text{ sekä } I_i \text{ ovat erisuuntaisia} \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Esimerkki. *Suunnatun graafin*



eri irrotukset (nuolijoukoiksi tulkittuina) ovat $I_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (suunta e_1 :n suunta), $I_2 = \{e_3, e_4, e_5\}$ (suunta e_3 :n suunta), $I_3 = \{e_1, e_2, e_5\}$ (suunta e_1 :n suunta) ja $I_4 = \emptyset$ (muut ovat samoja). Irrotusmatriisi on nyt

$$Q = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{matrix}$$

Koska $\langle \{v\}, V - \{v\} \rangle$ on irrotus jokaiselle pisteelle v , on Q :ssa rivinä jokainen täyden insidenssimatriisin rivi, suunnatun graafin tapauksessa mahdollisesti -1 :llä kerrottuna.

Lause 4.2. Jokainen suunnatun graafin irrotusmatriisin rivi voidaan lausua kahdella eri tavalla täyden insidenssimatriisin rivien lineaariyhdelmänä. Nollasta eroavat yhdelmän kertoimet ovat joko kaikki $= 1$ tai kaikki $= -1$.

Todistus. Otetaan suunnatun graafin $G = (V, E)$ irrotusmatriisi Q ja sen täysi insidenssimatriisi A . Olkoon $\langle V_1, V_2 \rangle$ (huomaa suunta) Q :n i :ttä riviä vastaava irrotus. Mahdollisesti indeksointia vaihtamalla voidaan olettaa, että

$$V_1 = \{v_1, \dots, v_r\} \quad \text{ja} \quad V_2 = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}.$$

Merkitään vielä

$$q_i = Q\text{:n } i\text{:s rivi} \quad \text{ja} \quad a_t = A\text{:n } t\text{:s rivi}.$$

Näytetään, että

$$q_i = \sum_{t=1}^r a_t = - \sum_{t=r+1}^n a_t,$$

jolloin lause tulee todistetuksi. Otetaan G :n k :s nuoli $(v_p, v_q) = e_k$. Silloin

$$a_{pk} = a_p\text{:n } k\text{:s alkio} = 1,$$

$$a_{qk} = a_q\text{:n } k\text{:s alkio} = -1$$

ja

$$a_{jk} = 0, \quad \text{jos } j \neq p, q.$$

Saadaan neljä tapausta:

- $v_p \in V_1$ ja $v_q \in V_2$: Nyt $p \leq r$ ja $q \geq r + 1$, joten $q_{ik} = 1$ ja

$$q_{ik} = \sum_{t=1}^r a_{tk} = - \sum_{t=r+1}^n a_{tk}.$$

- $v_p \in V_2$ ja $v_q \in V_1$: Nyt $p \geq r + 1$ ja $q \leq r$, joten $q_{ik} = -1$ ja

$$q_{ik} = \sum_{t=1}^r a_{tk} = - \sum_{t=r+1}^n a_{tk}.$$

- $v_p \in V_1$ ja $v_q \in V_1$: Nyt $p \leq r$ ja $q \leq r$, joten $q_{ik} = 0$ ja

$$q_{ik} = \sum_{t=1}^r a_{tk} = - \underbrace{a_{r+1,k}}_{=0} - \dots - \underbrace{a_{nk}}_{=0}.$$

- $v_p \in V_2$ ja $v_q \in V_2$: Nyt $p \geq r + 1$ ja $q \geq r + 1$, joten $q_{ik} = 0$ ja

$$q_{ik} = \underbrace{a_{1k}}_{=0} + \cdots + \underbrace{a_{rk}}_{=0} = - \sum_{t=r+1}^n a_{tk}.$$

Yllä oleva pätee jokaiselle k :n arvolle. □

Esimerkki. (Jatkoa) I_1 :tä vastaa rivi

$$(1, -1, -1, -1, 0) = (1, -1, -1, -1, 0) = -(-1, 1, 0, 0, -1) - (0, 0, 0, 0, 0) - (0, 0, 1, 1, 1).$$

Seuraus. Suunnatun graafin G irrotusmatriisin rangi on $\rho(G)$.

Todistus. G :n täysi insidenssmatriisi \mathbf{A} on sen irrotusmatriisin \mathbf{Q} alimatriisi, joten (Lauseen 4.1 Seuraus)

$$\text{rank}(\mathbf{Q}) \geq \text{rank}(\mathbf{A}) = \rho(G).$$

Toisaalta Lauseen 4.2 mukaan jokainen \mathbf{Q} :n rivi on lausuttavissa \mathbf{A} :n rivien lineaariyhdelmänä, joten

$$\text{rank}(\mathbf{Q}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = \rho(G).$$

□

Toinen seuraus on, että irrotusmatriisi \mathbf{Q} on kirjoitettavissa muotoon

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A},$$

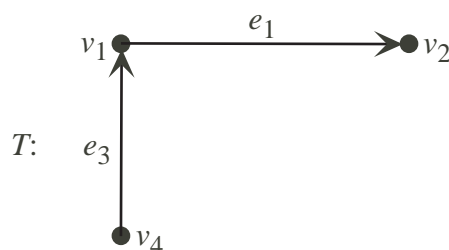
missä \mathbf{A}_1 :n alkiot ovat 0:ia ja ± 1 :iä. Lisäksi matriisi \mathbf{A}_1 on suoraan kirjoitettavissa Lauseen 4.2 todistuksesta.

Jos graafi G on yhtenäinen, sillä on virittävä puu T ja siihen liittyvät perusirrotusjoukot. Perusirrotusjoukot ovat myös irrotuksia (kun jälkimmäiset tulkitaan viivajoukoiksi). Näin ollen G :n irrotusmatriisilla \mathbf{Q} on perusirrotusjoukkoja vastaava alimatriisi \mathbf{Q}_f , ns. *perusirrotusmatriisi*. Samoin suunnatulla yhtenäisellä graafilla G on perusirrotusmatriisi: perusirrotusjoukon suunta irrotuksena valitaan vastaavan T :n oksan (nuolen) suuntaiseksi. Kun järjestetään G :n viivat (nuolet) siten, että T :n oksat ovat ensin jossain järjestyksessä ja perusirrotusjoukot asetetaan sitten T :n oksien antamaan järjestykseen, saadaan perusirrotusmatriisi muotoon

$$\mathbf{Q}_f = \left(\mathbf{I}_{n-1} \mid \mathbf{Q}_{fc} \right),$$

missä \mathbf{I}_{n-1} on $n - 1$ -rivinen identiteettimatriisi. \mathbf{Q}_f :n rangi on siis $n - 1 = \rho(G)$.

Esimerkki. (Jatkoa) Jätetään v_3 pois, jotta saadaan yhtenäinen suunnattu graafi. Valitaan virittäväksi puuksi



Perusirrotusjoukot ovat $I_2 = \{e_3, e_4, e_5\}$ (suunta e_3 :n suunta) ja $I_3 = \{e_1, e_2, e_5\}$ (suunta e_1 :n suunta). Silloin

$$\mathbf{Q}_f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} e_1 & e_3 & e_2 & e_4 & e_5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} I_3 \\ I_2 \end{matrix}$$

ja

$$\mathbf{Q} = \left(\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

4.3 Piirimatriisi

Tarkastellaan graafia $G = (V, E)$, jossa on piirejä. Numeroidaan G :n piirit: C_1, \dots, C_ℓ . G :n piirimatriisi on $\ell \times m$ -matriisi $\mathbf{B} = (b_{ij})$, missä

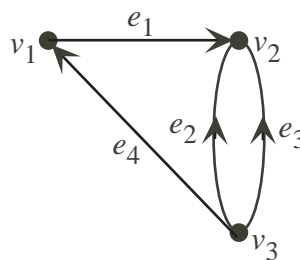
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos viiva } e_j \text{ on piirissä } C_i \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

(kuten tavallista $E = \{e_1, \dots, e_m\}$).

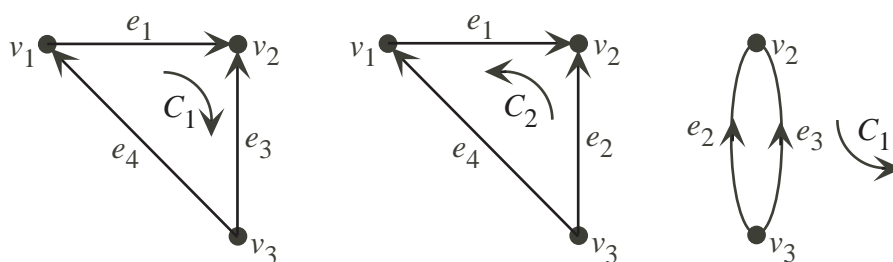
Suunnatun graafin G piirit *suunnistetaan*, ts. kullekin piirille annetaan (mielivaltainen) *kiertosuunta* piirimatriisin määrittelyä varten. Suunnistuksen jälkeen G :n piirimatriisi on $\mathbf{B} = (b_{ij})$, missä

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos nuoli } e_j \text{ on piirissä } C_i \text{ ja sen suunta yhtyy kiertosuuntaan} \\ -1, & \text{jos nuoli } e_j \text{ on piirissä } C_i \text{ ja sen suunta on kiertosuunnalle vastakkainen} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Esimerkki. *Suunnatun graafin*



piirit ovat



ja piirimatriisi on

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}$$

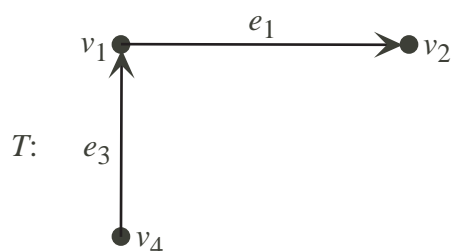
Jos graafi G on yhtenäinen (ja siinä on piirejä), sillä on virittävä vastapuu T^* ja siihen liittyvät peruspiirit. Poimimalla näitä vastaavat piirimatriisiin \mathbf{B} rivit saadaan $(m - n + 1) \times m$ -matriisi \mathbf{B}_f , ns. *peruspiirimatriisi*. Samoin suunnatulla yhtenäisellä graafilla G (jolla on piirejä) on peruspiirimatriisi: peruspiirin suunta valitaan vastaavan T^* :n siteen (nuolen) suuntaiseksi.

Kun järjestetään G :n viivat (nuolet) siten, että T^* :n siteet ovat viimeksi jossain järjestyksessä ja peruspiirit asetetaan sitten siteiden antamaan järjestykseen, saadaan peruspiirimatriisi muotoon

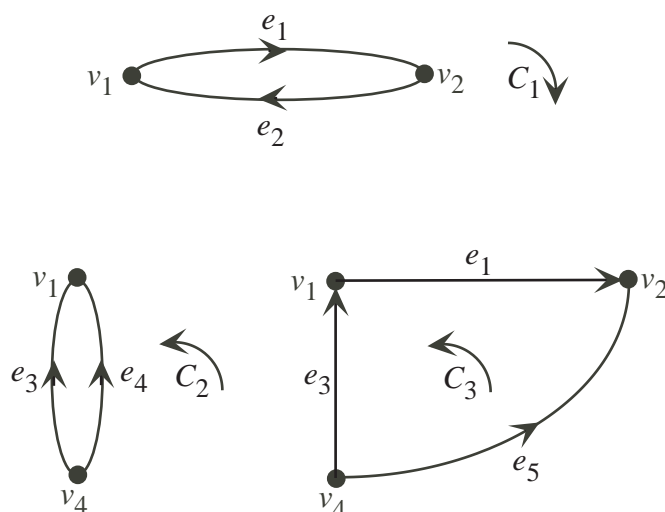
$$\mathbf{B}_f = \left(\mathbf{B}_{ft} \mid \mathbf{I}_{m-n+1} \right),$$

missä \mathbf{I}_{m-n+1} on $m - n + 1$ -rivinen identiteettimatriisi. \mathbf{B}_f :n rangi on siis $m - n + 1 = \mu(G)$ ja \mathbf{B} :n rangi on $\geq m - n + 1$.

Esimerkki. (Jatkoa) Jätetään v_3 pois, jotta saadaan yhtenäinen graafi (ks. sivu 33) ja käytetään virittävää puuta



Peruspiirit ovat silloin



ja

$$\mathbf{B}_f = \begin{pmatrix} e_1 & e_3 & e_2 & e_4 & e_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix}$$

Lause 4.3. *Suunnatun graafin suunnistetulla irrotuksella ja suunnistetulla piirillä on parillinen määrä $2k$ yhteisiä nuolia. Näistä k :lla nuolella on irrotuksen ja piirin suunta sama ja lopuilla k :lla nuolella eri.*

Todistus. Vrt. Lauseen 2.6 todistus. □

Lause 4.4. *Digraafille $\mathbf{BQ}^T = \mathbf{O}$ (nollamatriisi).*

Todistus. Edellisen lauseen nojalla matriisitulon \mathbf{BQ}^T alkioita vastaavissa pistetuloissa nolasta eroavista yhteenlaskettavista on puolet $+1$:siä ja toinen puoli -1 :siä, joten ne ovat $= 0$. □

Lause 4.5. *Jos digraafissa G on piirejä, niin sen piirimatriisin \mathbf{B} rangi on $\mu(G)$. Edelleen, jos G on yhtenäinen, niin \mathbf{B} voidaan kirjoittaa muotoon $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2\mathbf{B}_f$, missä matriisissa \mathbf{B}_2 on alkioina 0 :ia ja ± 1 :siä, ja irrotusmatriisi \mathbf{Q} voidaan kirjoittaa muotoon $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_f$, missä matriisissa \mathbf{Q}_1 on alkioina 0 :ia ja ± 1 :siä.*

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta, missä G on yhtenäinen. Valitaan G :n virittävä puu T ja kirjoitetaan G :n nuolet (m kappaletta) sellaiseen järjestykseen, missä ensiksi tulevat T :n oksat ja viimeksi T^* :n siteet. Kirjoitetaan sitten perusirrotusjoukot T :n oksien järjestykseen ja peruspiirit T^* :n siteiden järjestykseen. Silloin

$$\mathbf{Q}_f = \left(\mathbf{I}_{n-1} \mid \mathbf{Q}_{fc} \right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{B}_f = \left(\mathbf{B}_{ft} \mid \mathbf{I}_{m-n+1} \right).$$

Myös \mathbf{B} voidaan lohkoa vastaavasti:

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{B}_2 \right).$$

Koska \mathbf{Q}_f on \mathbf{Q} :n alimatriisi ja \mathbf{B}_f on \mathbf{B} :n alimatriisi, seuraa Lauseesta 4.4, että

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{B}_f\mathbf{Q}_f^T = \left(\mathbf{B}_{ft} \mid \mathbf{I}_{m-n+1} \right) \left(\mathbf{I}_{n-1} \mid \mathbf{Q}_{fc} \right)^T = \left(\mathbf{B}_{ft} \mid \mathbf{I}_{m-n+1} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{Q}_{fc}^T \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{B}_{ft}\mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{I}_{m-n+1}\mathbf{Q}_{fc}^T = \mathbf{B}_{ft} + \mathbf{Q}_{fc}^T. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\mathbf{B}_{ft} = -\mathbf{Q}_{fc}^T.$$

Edelleen, koska siis \mathbf{Q}_f on \mathbf{Q} :n alimatriisi, on samaisen lauseen nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{BQ}_f^T = \left(\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{B}_2 \right) \left(\mathbf{I}_{n-1} \mid \mathbf{Q}_{fc} \right)^T = \left(\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{B}_2 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{Q}_{fc}^T \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{B}_1\mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{B}_2\mathbf{Q}_{fc}^T = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_{ft}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_{ft} \mid \mathbf{B}_2 \right) = \mathbf{B}_2 \left(\mathbf{B}_{ft} \mid \mathbf{I}_{m-n+1} \right) = \mathbf{B}_2\mathbf{B}_f,$$

kuten väitettiin. Samalla tavoin voidaan näyttää, että \mathbf{Q} voidaan kirjoittaa väitettyyn muotoon $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_f$, mikä on selvää myös muuten, koska \mathbf{Q} :n rangi on $n - 1$ ja alkioit 0 :ia ja ± 1 :iä.

Jokainen \mathbf{B} :n rivi on siis peruspiirejä vastaavien rivien lineaariyhdelmä ja \mathbf{B} :n rangi on enintään \mathbf{B}_f :n rangi $= m - n + 1$. Toisaalta, kuten aikaisemmin todettiin, \mathbf{B} :n rangi on $\geq m - n + 1$. Siis $\text{rank}(\mathbf{B}) = m - n + 1 (= \mu(G))$ yhtenäiselle digraafille.

Epäyhtenäisen digraafin G (jossa on piirejä) tapauksessa jaetaan G komponentteihinsa ($k \geq 2$ kappaletta) ja piirimatriisi \mathbf{B} lohkoihin komponentteja vastaavasti (vrt. Lauseen 4.1 Seurauksen todistus), jolloin

$$\text{rank}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^k (m_i - n_i + 1) = m - n + k = \mu(G). \quad \square$$

Huomaa ”sivutuloksena” tullut kaava $\mathbf{B}_{ft} = -\mathbf{Q}_{fc}^T$, joka liittyy perusirrotusmatriisiin ja peruspiirimatriisiin toisiinsa.

4.4 Sovellus: Stationääriset lineaariset verkot

Stationäärinen lineaarinen verkko on suunnattu graafi G , joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. G on yhtenäinen.
2. G :n jokainen nuoli on jossain piirissä ja G :ssä ei ole silmukoita.
3. G :n jokaiseen nuoleen e_j liittyy numeerinen suure, ns. *läpisyure* i_j . Jos G :ssä on m nuolta, merkitään

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix}$$

(*läpivektori*).

4. G :n jokaiseen pisteeseen v_i liittyy numeerinen suure p_i , ns. *potentiaali*. Edelleen jokaiseen G :n nuoleen $e_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$ liittyy ns. *poikkisyure*

$$u_j = p_{i_2} - p_{i_1}.$$

Jos G :ssä on n pistettä ja m nuolta, merkitään

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

(*potentiaalivektori* ja *poikkivektori*). (Potentiaaleja ei useinkaan tarvita.)

5. G :n jokainen nuoli e_j on vaihtoehdoisesti
 - (a) ns. *komponentti*¹, jolloin siihen liittyy luku r_j . r_j on vakio ($\neq 0$) (stationäärisyys) ja em. suureet liittyvät toisiinsa yhtälöllä

$$u_j = i_j r_j \quad (\text{lineaarisuus}).$$

- (b) ns. *läpilähde*, jolloin siihen liittyvä läpisyure i_j on ennalta kiinnitetty.
 - (c) ns. *poikkilähde*, jolloin siihen liittyvä poikkisyure u_j on ennalta kiinnitetty.

6. (*Kirchhoffin laki läpisyureille*) Jokaisen G :n suunnistetun irrotuksen läpisyureiden summa on $= 0$, kun irrotus tulkitaan nuolijoukoksi ja suure otetaan summaan mukaan sellaisenaan, mikäli vastaavan nuolen ja irrotuksen suunnat ovat samat, ja vastakkaismerkkisenä muuten.

7. (*Kirchhoffin laki poikkisyureille*) Jokaisen G :n suunnistetun piirin poikkisyureiden summa on $= 0$, kun suure otetaan summaan mukaan sellaisenaan, mikäli vastaavan nuolen ja piiriin suunnat ovat samat, ja vastakkaismerkkisenä muuten.

Esimerkki. Tyypillinen esimerkki stationäärisestä lineaarisesta verkosta on lineaarinen resistiivinen virtapiiri, jossa on vakiovirta- ja jännitelähteitä. Komponentti on silloin resistori ja r_j on resistanssi. Ehto 5.(a) on Ohmin laki.

¹Ei pidä sekoittaa graafin komponenttiin!

Muodostetaan stationääriselle lineaariselle verkolle G jokin virittävä puu T ja sitä kautta perusirrotusmatriisi \mathbf{Q}_f sekä peruspiirimatriisi \mathbf{B}_f . Järjestetään näissä sekä vektoreissa \mathbf{i} ja \mathbf{u} nuolet kuten tehtiin edellä eli siten, että ensin tulevat T :n oksat ja sitten T^* :n siteet. Kirchhoffin lait voidaan silloin kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Toisaalta perusirrotusmatriisin \mathbf{Q}_f rivit generoivat lineaarisesti kaikki \mathbf{Q} :n rivit ja vastaavasti peruspiirimatriisin \mathbf{B}_f rivit generoivat kaikki \mathbf{B} :n rivit. Niinpä Kirchhoffin lait voidaan kirjoittaa ekvivalenttiin muotoon

$$\mathbf{Q}_f\mathbf{i} = \mathbf{0}_{n-1} \quad \text{ja} \quad \mathbf{B}_f\mathbf{u} = \mathbf{0}_{m-n+1}.$$

Muodostetaan vielä lävistäjämatriisit $\mathbf{K} = [k_1, \dots, k_m]$ ja $\mathbf{L} = [\ell_1, \dots, \ell_m]$, missä

$$k_j = \begin{cases} -r_j, & \text{jos } e_j \text{ on komponentti} \\ 1, & \text{jos } e_j \text{ on läpilähde} \\ 0, & \text{jos } e_j \text{ on poikkilähde} \end{cases} \quad \text{ja} \quad \ell_j = \begin{cases} 1, & \text{jos } e_j \text{ on komponentti} \\ 0, & \text{jos } e_j \text{ on läpilähde} \\ 1, & \text{jos } e_j \text{ on poikkilähde,} \end{cases}$$

sekä m -vektori $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)^T$, missä

$$s_j = \begin{cases} 0, & \text{jos } e_j \text{ on komponentti} \\ i_j, & \text{jos } e_j \text{ on läpilähde} \\ u_j, & \text{jos } e_j \text{ on poikkilähde.} \end{cases}$$

Silloin kaikki tieto voidaan kirjoittaa lineaariseksi yhtälöryhmäksi

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \hline \mathbf{Q}_f & \mathbf{O}_{(n-1) \times m} \\ \hline \mathbf{O}_{(m-n+1) \times m} & \mathbf{B}_f \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{m-n+1} \end{pmatrix},$$

ns. *perusyhtälöt*, josta (ideaalisesti) läpi- ja poikkisuureet voidaan ratkaista, kun luvut r_j ja läpi- sekä poikkilähteet on annettu.

Huomautus. Vastaavanlaista menettelyä voidaan soveltaa tilayhtälöiden (differentiaaliyhtälöiden) muodostamiseksi, kun verkossa on dynaamisia komponentteja ja lähteitä.

Yhtälöryhmän matriisin ei tarvitse olla ei-singulaarinen eikä ryhmällä tarvitse olla yksikäsitteistä ratkaisua lainkaan! Yhtälöryhmän matriisista näkee esimerkiksi melko suoraan, että se on singulaarinen, jos jokin piiri muodostuu vain poikkilähteistä tai jos jokin irrotus muodostuu vain läpilähteistä. Itse asiassa tämä on kuitenkin ainoa tilanne, jossa läpi- ja poikkisuureet eivät määräydy yksikäsitteisesti, jos vakiot r_j ovat samanmerkkisiä reaalityyppisiä (ja usein muutenkin).

Asian tarkemmaksi tutkimiseksi valitaan ensin käytetty virittävä puu T sopivasti:

Apulause. Jos mikään G :n irrotus ei muodostu pelkistä läpilähteistä eikä mikään sen piiri muodostu pelkistä poikkilähteistä, niin G :llä on sellainen virittävä puu T , että kaikki poikkilähteet ovat T :n oksia ja kaikki läpilähteet ovat T^* :n siteitä.

Todistus. Jos G toteuttaa mainitun oletuksen, valitaan ensin lähtökohdaksi digraafi M , jossa ovat kaikki G :n pisteet ja poikkilähteet (nuolet). Tässä digraafissa ei ole piirejä. Lisätään siten M :ään yksitellen komponentteja pyrkien virittävään puuhun. Jos tämä ei jossain vaiheessa onnistuisikaan, on G :llä irrotus, jossa on vain läpilähteitä, mikä ei ole mahdollista. \square

Oletetaan nyt, että mikään G :n irrotus ei muodostu pelkistä läpilähteistä eikä mikään sen piiri muodostu pelkistä poikkilähteistä, ja otetaan käyttöön Apulauseessa mainittu virittävä puu T . Järjestetään G :n nuolet vielä siten, että (edellä olevaan tapaan) T :n oksat tulevat ensin ja näistä oksista poikkilähteet tulevat ennen komponentteja. Vastaavasti järjestetään siteet siten, että komponentit tulevat ensin ja läpilähteet viimeksi.

Yo. $2m$ yhtälön ryhmä voidaan silloin kirjoittaa lohkokottuna muotoon

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{R}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\mathbf{R}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{i}_4 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{poikkilähteet (oksissa)} \\ \leftarrow \text{komponentit (oksissa)} \\ \leftarrow \text{komponentit (siteissä)} \\ \leftarrow \text{läpilähteet (siteissä)} \\ \leftarrow \text{perusirrotusjoukot (poikkilähteet)} \\ \leftarrow \text{perusirrotusjoukot (komponentit)} \\ \leftarrow \text{peruspiirit (komponentit)} \\ \leftarrow \text{peruspiirit (läpilähteet)} \end{array}$$

missä \mathbf{I} :t ovat sopivankokoisia identiteettimatriiseja, \mathbf{O} :t sopivankokoisia nollamatriiseja ja $\mathbf{0}$:t sopivanpituisia nollavektoreita.

Huomautus. Tässä oletetaan, että G :ssä on kaikkia neljää esiintyvää nuolityyppiä (poikkilähde- ja komponenttioksat, läpilähde- ja komponenttisiiteet). Muussa tapauksessa (esimerkiksi jos ei ole läpilähteitä) jätetään vastaavat lohkorivit ja -sarakkeet sekä vektorien alkioit pois. Nämä tapaukset käsitellään vastaavasti.

Suoraan ratkaisemalla saadaan

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{s}_1 \quad , \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{R}_1 \mathbf{i}_2 \quad , \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{R}_2 \mathbf{i}_3 \quad , \quad \mathbf{i}_4 = \mathbf{s}_2,$$

joten voidaan siirtyä yhtälöryhmään

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_{12} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_{22} \mathbf{R}_1 & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{12} \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{Q}_{22} \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{B}_{11} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{B}_{21} \mathbf{s}_1 \end{pmatrix}.$$

Siispä

$$\mathbf{i}_1 = -\mathbf{Q}_{11} \mathbf{i}_3 - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{s}_2 \quad , \quad \mathbf{i}_2 = -\mathbf{Q}_{21} \mathbf{i}_3 - \mathbf{Q}_{22} \mathbf{s}_2 \quad , \quad \mathbf{u}_4 = -\mathbf{B}_{22} \mathbf{R}_1 \mathbf{i}_2 - \mathbf{B}_{21} \mathbf{s}_1.$$

Edellisen pykälän tuloksista saadaan vielä yhtälö

$$\mathbf{B}_{\text{ft}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array} \right) = -\mathbf{Q}_{\text{fc}}^{\text{T}} = - \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \hline \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{array} \right)^{\text{T}} = \left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{Q}_{11}^{\text{T}} & -\mathbf{Q}_{21}^{\text{T}} \\ \hline -\mathbf{Q}_{12}^{\text{T}} & -\mathbf{Q}_{22}^{\text{T}} \end{array} \right),$$

joten $\mathbf{B}_{11} = -\mathbf{Q}_{11}^T$ ja $\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{Q}_{21}^T$ ja jäljelle jää lopulta vain yhtälöryhmä \mathbf{i}_3 :lle:

$$(\mathbf{Q}_{21}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_{21} + \mathbf{R}_2) \mathbf{i}_3 = \mathbf{Q}_{11}^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{Q}_{21}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_{22} \mathbf{s}_2.$$

Tämän yhtälöryhmän matriisi² voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{Q}_{21}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_{21} + \mathbf{R}_2 = \left(\mathbf{Q}_{21}^T \mid \mathbf{I} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1 & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{R}_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{Q}_{21} \\ \mathbf{I} \end{array} \right),$$

josta välittömästi näkyy, että se on ei-singulaarinen, jos \mathbf{R}_1 :n ja \mathbf{R}_2 :n lävistäjäalkiot ovat kaikki negatiivilukuja tai kaikki positiivilukuja.

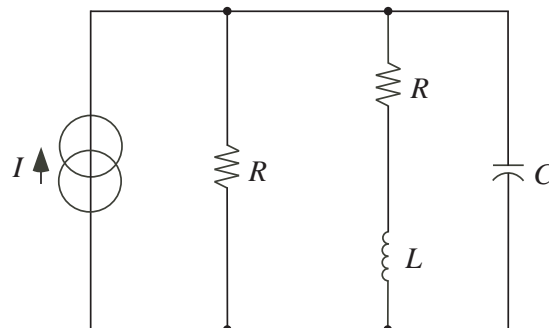
Näin saadaan

Lause 4.6. Jos vakiot r_j ovat samanmerkkisiä reaalityyppisiä, niin stationääriseen lineaariseen verkon perusyhtälöillä on yksikäsitteinen ratkaisu tarkalleen siinä tapauksessa, että mikään verkon irrotus ei muodostu pelkistä läpilyhteistä eikä mikään sen piiri muodostu pelkistä poikkilyhteistä.

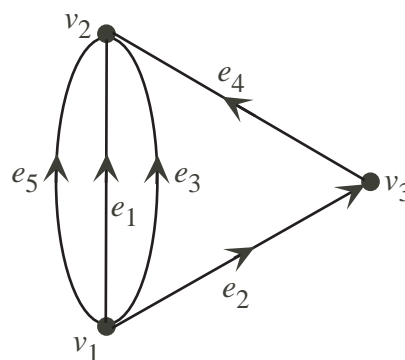
Edellä olevasta havaitaan myös yleisestikin, että niiden yhtälöiden määrä, jotka pitää ratkaista (numeerisesti), on huomattavasti pienempi kuin $2m$.

Esimerkki. Vakiotajuiset virtapiirit (vaihtovirtapiirit), joissa on resistansseja, kapasitansseja ja induktansseja, voivat myös olla stationäärisiä lineaarisia verkkoja. (Lause 4.6 ei niitä koske.) Alla olevassa virtapiirissä $R = 10 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$, $L = 10 \text{ mH}$ ja virtalähde on

$$I = 10 \cos(1000t) \text{ A}.$$



Vastaava kompleksivirta on $10e^{j1000t}$, missä j on imaginääriyksikkö. (Kulma)taajuus on siis $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Jännitelähteitä ei ole. Vastaava digraafi on



²Matriisia kutsutaan *impedanssmatriisiksi*. Vastaava matriisi voitaisiin koota myös käyttäen peruspiirimatriisin lohkoja, silloin sitä kutsutaan *admittanssmatriisiksi*.

Virrat ja jännitteet kirjoitetaan kompleksimuotoonsa $i_k = I_k e^{j1000t}$ ja $u_k = U_k e^{j1000t}$, jolloin virtalähde on $i_5 = s_5 = 10e^{j1000t}$. Luvut r_k saadaan tutuista impedanssilaeista

$$r_1 = r_4 = R = 10 \quad , \quad r_3 = \frac{1}{j\omega C} = -10j \quad , \quad r_2 = j\omega L = 10j.$$

Valitaan virittävän puun T oksiksi e_1 ja e_2 . Lineaarisuudesta johtuen yhtälöryhmistä supistuu pois eksponenttitekijä e^{j1000t} ja saadaan ryhmä

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10j & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10j & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Huomaa, että pois on jätetty oksissa olevien poikkilähteiden osuus, sillä sellaisia ei ole. Tämä ryhmä on niin pieni, että se on helposti ratkaistavissa esimerkiksi Matlabilla:

```

>H=[-10      0      0      0      0      1      0      0      0      0 ;
      0     -10*j      0      0      0      0      1      0      0      0 ;
      0      0     10*j      0      0      0      0      1      0      0 ;
      0      0      0     -10      0      0      0      0      1      0 ;
      0      0      0      0      0      0      1      0      0      0 ;
      1      0      1      1      1      0      0      0      0      0 ;
      0      1      0     -1      0      0      0      0      0      0 ;
      0      0      0      0      0     -1      0      1      0      0 ;
      0      0      0      0      0     -1      1      0      1      0 ;
      0      0      0      0      0     -1      0      0      0      1];
>s=[0 0 0 0 10 0 0 0 0 0]';
>UV=inv(H)*s;
>[UV angle(UV) abs(UV)]

ans =

-6.0000 + 2.0000i    2.8198    6.3246
-2.0000 + 4.0000i    2.0344    4.4721
-2.0000 - 6.0000i   -1.8925    6.3246
-2.0000 + 4.0000i    2.0344    4.4721
10.0000              0        10.0000
-60.0000 +20.0000i    2.8198    63.2456
-40.0000 -20.0000i   -2.6779    44.7214
-60.0000 +20.0000i    2.8198    63.2456
-20.0000 +40.0000i    2.0344    44.7214
-60.0000 +20.0000i    2.8198    63.2456

```

Näin esimerkiksi virtalähteen yli vaikuttava kompleksijännite on

$$u_5 = U_5 e^{j1000t} = 63.25 e^{j(1000t+2.82)}$$

ja reaalinen jännite $63.25 \cos(1000t + 2.82)$ V.

Kirchhoffin läpilaki voidaan myös kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}_n,$$

missä \mathbf{A} on G :n täysi insidenssimatriisi. Edelleen voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{A}^T \mathbf{p} = -\mathbf{u}.$$

Näin ollen

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{u}^T \mathbf{i} = -\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{i} = 0.$$

Tämä tulos riippuu G :stä vain sen digraafirakenteen (eli täyden insidenssimatriisin) kautta. Näin saadaan kuuluisa

Lause 4.7. (Tellegenin lause) *Jos kahdella stationäärillä lineaarisella verkolla on sama digraafi, vastaavat läpivektorit ovat \mathbf{i}_1 sekä \mathbf{i}_2 ja vastaavat poikkivektorit ovat \mathbf{u}_1 sekä \mathbf{u}_2 , niin*

$$\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{i}_2 = 0 \quad \text{ja} \quad \mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{i}_1 = 0.$$

Sovellettuna tilanteeseen, jossa Tellegenin lauseessa mainitut kaksi verkkoa ovat samat (= G edellä), saadaan yhtälö

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{i} = 0,$$

ns. verkon *energian säilymislaki*.

Huomautus. *Huomattavasti laajemmin asiaa käsittelee esimerkiksi SWAMY & THULASIRAMAN tai VÁGÓ, ks. myös DOLAN & ALDOUS.*

4.5 Matriisit yli $\text{GF}(2)$:n ja graafien lineaariavaruuDET

Joukko $\{0, 1\}$ on ns. *kunta* (ts. tottelee samoja laskusääntöjä kuin reaalityöt), jos yhteen- ja kertolasku määritellään seuraavasti:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Tällöin siis $-1 = 1$ ja $1^{-1} = 1$. Kyseessä on kunta $\text{GF}(2)$.

Jos ajatellaan ("suuntaamattoman") graafin (täyden) insidenssimatriisin, irrotusmatriisin, perusirrotusmatriisin, piirimatriisin sekä peruspiirimatriisin alkioiksi $\text{GF}(2)$:n 0 ja 1, pätevät Lause 4.1 ja sen Seuraus, Lause 4.2 ja sen Seuraus, Lause 4.4 sekä Lause 4.5 myös "suuntaamattomille" graafeille. (Muista: $-1 = 1$ kunnassa $\text{GF}(2)$.) Todistukset ovat samat.

Graafin tapauksessa lineaariavaruuDET ovat yli kunnan $\text{GF}(2)$, digraafin tapauksessa ne ovat reaalisia (eli yli kunnan \mathbb{R}). (Di)graafin irrotusmatriisin riviavaruus on (di)graafin *irrotusavaruus*. Vastaavasti sen piirimatriisin riviavaruus on *piiriavaruus*. Irrotusavaruuden dimensio on (di)graafin rangi ja piiriavaruuden dimensio on sen nulliteetti. Lisäksi digraafin irrotusavaruus ja piiriavaruus ovat toistensa ortogonaaliset komplementit. (Kaikki tämä seuraa suoraan eo. tuloksista.)

Usein ajatellaan yo. avaruuksia aligraafien kautta, ts. samaistetaan vektori vastaavien viivojen (nuolien) generoimaan aligraafiin. "Suuntaamattomien" graafien tapauksessa vektorien $\text{GF}(2)$:n yhteenlaskua vastaa tällöin rengassumma.

Luku 5

GRAAFIEN ALGORITMIT

5.1 Algoritmien vaativuusteoriaa

Laskennallinen vaativuus eli *kompleksisuus* liittyy tehtävien laskennalliseen ratkaisemiseen tarvittaviin resursseihin verrattuna tehtävän kokoon. Tehtävän kokoa mitataan syötteen pituudella N , resurssit taas ovat yleensä aika (laskenta-askelten lukumäärä) tai tila (laskennan käyttämä maksimaalinen muistitila sopivasti mitattuna). Usein tehtävät ovat ns. *tunnistustehtäviä*, joissa ratkaisu on kyllä-vastaus. Hyvä viite klassisen kompleksisuusteorian osalta on HOPCROFT & MOTWANI & ULLMAN.

Jotta vaativuus saadaan yhteismitalliseksi, pitää sopia tietty algoritmin matemaattinen malli, esimerkiksi Turingin koneilla laskeminen, ks. kurssi Theoretical Computer Science tai Mathematical Logic Algoritmimalleista on käytettävissä *deterministinen* versio, missä algoritmilla ei ole valinnanmahdollisuuksia, ja *epädeterministinen* versio, missä algoritmin seuraava askel saattaa olla valittavissa useista mahdollisista askelista. Jotta epädeterministisen algoritmin voitiin sanoa ratkaisevan tehtävän, pitää tehdä seuraavat oletukset:

1. Algoritmi pysähtyy, valitaanpa askelet miten tahansa.
2. Algoritmi voi pysähtyä tilaan, jossa se ei ole ratkaissut tehtävää.
3. Kun algoritmi pysähtyy tilaan, jossa se antaa ratkaisun, niin ratkaisun pitää olla oikea (ratkaisuja voi tällöin olla useitakin).
4. Tunnistustehtävissä tapaus, missä algoritmi ei anna yhtään kyllä-vastausta, tulkitaan ei-vastaukseksi.
5. Jos tehtävänä on laskea jonkin syötteen funktion arvo, niin epädeterministisen algoritmin on jokaisella syötteellä annettava ratkaisu (funktion arvo).

Epädeterministinen algoritmi onkin useimmiten parhaiten ajateltavissa ratkaisun *todennusmenetelmäksi*, ei sen tuottamisen menetelmäksi.

Vaativuutta tarkastellaan pääosin *asymptoottisena*, ts. suurten tehtävien osalta, eikä vakio-kertoimella eroavia aika-/tilakompleksisuuksia eroteta toisistaan, lineaarinen kiihdytys ja tilan pakkaus kun ovat helppoja saada aikaan missä tahansa algoritmimallissa. Vaikka algoritmimallin valinnalla on selvä merkitys vaativuuteen, sillä ei ole oleellista merkitystä, ts. se ei muuta vaativuusluokkia, joihin tehtävät vaativuutensa perusteella jaetaan. Usein vaativuus annetaan *kertalukuarviomuodossa* eli ns. *O-notaatiolla*. Silloin $O(f(N))$ tarkoittaa kollektiivisesti sel- laista funktiota $g(N)$, että jostain rajasta $N \geq N_0$ lähtien $|g(N)| \leq Cf(N)$, missä C on jokin vakio.

Menemättä sen tarkemmin algoritmimalleihin määritellään muutama keskeinen kompleksisuusluokka. Aikakompleksisuusluokka \mathcal{P} (*deterministisesti polynomiaikaiset tehtävät*) muodostuu niistä tehtävistä, joissa N -pituisen probleeman (syötteen) ratkaisemiseen deterministisellä algoritmilla kuluu enintään $p(N)$ askelta, missä p on jokin (tehtävästä riippuva) N :n polynomi. Aikakompleksisuusluokka \mathcal{NP} (*epädeterministisesti polynomiaikaiset tehtävät*) taas muodostuu niistä tehtävistä, joissa N -pituisen probleeman ratkaisemiseen epädeterministisellä algoritmilla kuluu enintään $p(N)$ askelta, missä p on jokin (jälleen tehtävästä riippuva) N :n polynomi.

Aikakompleksisuusluokka $\text{co-}\mathcal{NP}$ (*komplementäärisesti epädeterministisesti polynomiaikaiset tehtävät*) taas muodostuu niistä tunnistustehtävistä, joiden komplementti on \mathcal{NP} :ssä. (Probleeman *komplementti* saadaan, kun kyllä- ja ei-vastaukset vaihdetaan keskenään.)

Ilmeisesti $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$ ja (tunnistustehtävien osalta) $\mathcal{P} \subseteq \text{co-}\mathcal{NP}$. Onko kumpikaan näistä sisällymisistä aito, on avoin ongelma (ja hyvin kuuluisa sellainen!). Yleisesti uskotaan, ettei kumpikaan ole yhtäläisyys. Myöskään ei tiedetä, onko (tunnistustehtävien osalta) kumpikaan yhtälöistä

$$\mathcal{NP} = \text{co-}\mathcal{NP} \quad \text{tai} \quad \mathcal{P} = \mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$$

voimassa, yleisesti kuitenkin uskotaan, ettei ole.

Tilakompleksisuusluokka \mathcal{PSPACE} (*deterministisesti polynomitilaiset tehtävät*) muodostuu niistä tehtävistä, joissa N -pituisen probleeman (syötteen) ratkaisemiseen deterministisellä algoritmilla tarvitaan enintään $p(N)$ muistiyksikköä, missä p on jokin (tehtävästä riippuva) N :n polynomi. Tilakompleksisuusluokka $\mathcal{NPSPACE}$ (*epädeterministisesti polynomitilaiset tehtävät*) taas muodostuu niistä tehtävistä, joissa N -pituisen probleeman ratkaisemiseen epädeterministisellä algoritmilla kuluu enintään $p(N)$ muistiyksikköä, missä p on jokin (jälleen tehtävästä riippuva) N :n polynomi. Tiedetään, että

$$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PSPACE} = \mathcal{NPSPACE},$$

mutta ei sitä onko sisältyminen aito.

Algoritmissa saattaa olla mukana ideaalisen satunnaisluvun generointi, jolloin algoritmi on *probabilistinen* eli *stokastinen*. Vastaava polynomiaikainen kompleksisuusluokka on \mathcal{BPP} (*satunnaisesti polynomiaikaiset tehtävät*). Stokastinen algoritmi saattaa satunnaisesti epäonnistua, ts. se ei tuota lainkaan tulosta ja luopuu tehtävän ratkaisemisesta. Tällaisia algoritmeja kutsutaan *Las Vegas -algoritmeiksi*. Stokastinen algoritmi saattaa toisaalta toisinaan (ideaalisesti pienellä todennäköisyydellä) tulostaa väärän ratkaisun, tällaisia algoritmeja kutsutaan puolestaan *Monte Carlo -algoritmeiksi*. Vielä stokastinen algoritmi saattaa vain harvoin tuottaa tarkan ratkaisun, mutta kuitenkin suurella todennäköisyydellä lähellä tarkkaa olevan ratkaisun. Tällaiset algoritmit ovat ns. *aproskimaatioalgoritmeja*.

Algoritmin tehtävä saattaa olla yhden tehtävän probleeman konvertoiminen toisen tehtävän probleemaksi, tällöin puhutaan *reduktiosta*. Jos tehtävä A saadaan redusoiduksi toiseksi tehtäväksi B käyttäen (deterministisessä) polynomiajassa toimivaa reduktiota, saadaan B :n polynomiaikaisesta algoritmista A :lle polynomiaikainen algoritmi. Tehtävän sanotaan olevan \mathcal{NP} -kova, jos jokainen \mathcal{NP} :n tehtävä voidaan redusoida siihen polynomiaikaisella algoritmilla. \mathcal{NP} -kova tehtävä on \mathcal{NP} -täydellinen, jos se on itse \mathcal{NP} :ssä. \mathcal{NP} -täydellinen tehtävä on siinä mielessä ”pahin mahdollinen”, että jos se voitaisiin näyttää deterministisesti polynomiaikaiseksi, niin kaikki \mathcal{NP} :n tehtävät olisivat \mathcal{P} :ssä ja $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. \mathcal{NP} -täydellisiä tehtäviä tunnetaan nykyään toistatuhatta (laskentatavasta riippuen enemmänkin).

Vanha tehtävien jako laskenta-ajan puolesta käytännössä mahdollisiin eli *selviäviin* (tractable) ja liian aikaaviepiin eli *selviämättömiin* (intractable) on se, että \mathcal{P} :n tehtävät ovat selviäviä ja muut selviämättömiä. Koska yleisesti uskotaan, että $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, olisivat \mathcal{NP} -täydelliset tehtävät näin selviämättömiä.

Jatkossa tarkasteltavat graafialgoritmit ovat joko \mathcal{P} :ssä tai sitten vaativampia tehtäviä ap-
proksimoivia algoritmeja. Syötteen (graafin) koko voi olla esimerkiksi sen insidenssimatriisin
esittämiseen tarvittavien merkkien lukumäärä tai sitten vain pisteiden lukumäärä n tai viivojen
lukumäärä m tai $n + m$, tms.

5.2 Saavutettavuus: Warshallin algoritmi

Tässä pykälässä tarkastellaan vain suunnattuja graafeja. Tulokset pätevät kuitenkin myös ”suun-
taamattomille” graafeille, kun viiva aina tulkitaan vastakkaissuuntaisten nuolten pariaksi.

Tehtävä. Annetaan digraafi $G = (V, E)$ vieruspistematriisin avulla. Laskettava G :n saavutet-
tavuusmatriisi $\mathbf{R} = (r_{ij})$, missä

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } G\text{:ssä on suunnattu } v_i\text{-}v_j\text{-polku} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

(Tässä tietysti $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.) Huomaa erityisesti, että jos $r_{ii} = 1$, niin v_i on suunnatussa
piirissä.

Warshallin algoritmi konstruoi $n \times n$ -matriisien jonon $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$, missä

1. \mathbf{E}_i :n alkiot ovat nollija ja ykkösiä.
2. $\mathbf{E}_i \leq \mathbf{E}_{i+1}$ ($i = 0, \dots, n - 1$) (vertailu alkioittain).
3. \mathbf{E}_0 saadaan vieruspistematriisista \mathbf{D} vaihtamalla sen positiiviset alkiot ykkösiksi.
4. $\mathbf{E}_n = \mathbf{R}$.

Algoritmi pseudokoodina esitettynä on seuraava:

```

procedure Warshall
begin
   $\mathbf{E} := \mathbf{E}_0$ 
  for  $i := 1$  to  $n$  do
    for  $j := 1$  to  $n$  do
      if  $(\mathbf{E})_{ji} = 1$  then for  $k := 1$  to  $n$  do
         $(\mathbf{E})_{jk} := \max((\mathbf{E})_{jk}, (\mathbf{E})_{ik})$ 
      fi
    od
  od
end

```

Tässä yhteydessä maksimointioperaatiota kutsutaan usein *Boolen summaksi*:

$$\begin{array}{c|cc} \max & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

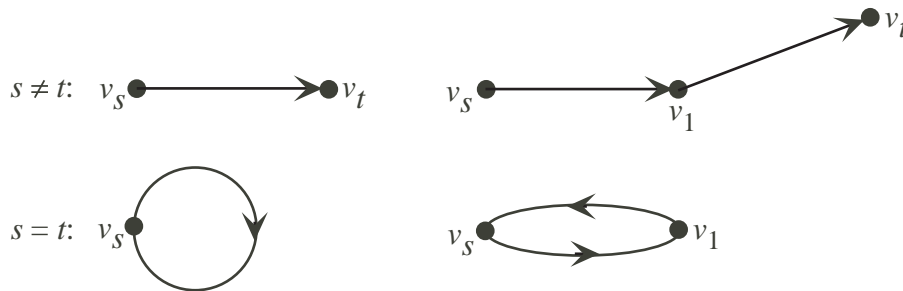
Näytetään, että Warshallin algoritmi tuottaa halutun tuloksen. Merkitään \mathbf{E}_i :llä \mathbf{E} :n arvoa,
kun arvoa i vastaava osa on saatu valmiiksi.

Väite. (i) Jos pisteestä v_s on pisteeseen v_t sellainen suunnattu polku, että siinä v_s :n ja v_t :n lisäksi esiintyy vain pisteitä v_1, \dots, v_i , niin $(\mathbf{E}_i)_{st} = 1$.

(ii) Jos piste v_s on suunnatussa piirissä, jonka muut pisteet ovat joukossa $\{v_1, \dots, v_i\}$, niin $(\mathbf{E}_i)_{ss} = 1$.

Todistus. Käytetään induktiota i :n suhteen.

Induktion lähtökohta: $i = 1$. Nyt $(\mathbf{E}_1)_{st} = 1$, jos joko $(\mathbf{E}_0)_{st} = 1$ tai sitten $(\mathbf{E}_0)_{s1} = 1$ ja $(\mathbf{E}_0)_{1t} = 1$. Tilanne on jokin allaolevista:



Induktio-oletus: Väite on oikea, kun $i < \ell$. ($\ell \geq 2$)

Induktioväite: Väite on oikea, kun $i = \ell$.

Induktioväitteen todistus: Käsitellään väitteen molemmat kohdat yhdessä. Kohtaa (ii) koskeva osa annetaan hakasuluissa. Saadaan kaksi tapausta:

- v_ℓ on mainitulla suunnatulla polulla [vast. mainitussa suunnatussa piirissä], mutta $\ell \neq s, t$ [vast. $\ell \neq s$]. Silloin induktio-oletuksen nojalla

$$(\mathbf{E}_{\ell-1})_{s\ell} = 1 \quad \text{ja} \quad (\mathbf{E}_{\ell-1})_{\ell t} = 1 \quad [\text{vast.} \quad (\mathbf{E}_{\ell-1})_{s\ell} = 1 \quad \text{ja} \quad (\mathbf{E}_{\ell-1})_{\ell s} = 1],$$

joten $(\mathbf{E}_\ell)_{st} = 1$ [vast. $(\mathbf{E}_\ell)_{ss} = 1$].

- v_ℓ on joko v_s tai v_t [vast. v_ℓ on v_s] tai sitten v_ℓ ei ole ollenkaan koko suunnatulla polulla [vast. suunnatussa piirissä]. Silloin induktio-oletuksen nojalla

$$(\mathbf{E}_{\ell-1})_{st} = 1 \quad [\text{vast.} \quad (\mathbf{E}_{\ell-1})_{ss} = 1],$$

joten $(\mathbf{E}_\ell)_{st} = 1$ [vast. $(\mathbf{E}_\ell)_{ss} = 1$].

□

Warshallin algoritmin suorituksessa operaatio max suoritetaan enintään n^3 kertaa.

5.3 Etsintä: Syvyysetsintä ja leveysetsintä

Tehtävä. Käytävä läpi annettu (di)graafi tietyntyyppisten pisteiden tai viivojen (nuolien) tms. löytämiseksi (etsintä).

Jatkossa oletetaan (di)graafin olevan yhtenäisen ja silmukattoman. Tarvittaessa voidaan epäyhtenäisen (di)graafin komponentit käydä läpi erikseen ja poistaa tai jättää huomiotta silmukat.

Syvyysetsintä (depth-first-etsintä, DF-etsintä) on yleiskäyttöinen etsintämenetelmä. Menetely on hieman erilainen graafeille ja digraafeille, joten katsotaan nämä erikseen.

Suuntaamaton graafi

Valitaan graafista G lähtöpiste r (*juuri*), josta etsintä aloitetaan. Sitten valitaan jokin viiva $e = (r, v)$ ja mennään pisteeseen v . Samalla viiva e *suunnataan* r :stä v :hen. Viivan e sanotaan olevan nyt *tarkastettu* ja sitä sanotaan *puuviivaksi*. Pistettä r sanotaan pisteen v *isäksi*, merkitään $r = \text{ISÄ}(v)$.

Etsintää jatketaan. Yleisesti, kun ollaan menossa pisteessä x , on kaksi tapausta:

- (1) Jos kaikki viivat, joiden päätepiste x on, on jo tarkastettu, palataan x :n isään $\text{ISÄ}(x)$. Pisteeseen x sanotaan tällöin olevan *täysin käsitelty*.
- (2) Jos joitain viivoja, joiden päätepiste x on, ei ole vielä tarkastettu, niin valitaan jokin niistä, sanotaan $e = (x, y)$, ja suunnataan se x :stä y :hyn. Viivan e sanotaan nyt olevan *tarkastettu*. Saadaan kaksi alatapausta:
 - (2.1) Jos y :ssä ei ole aikaisemmin käyty, niin jatketaan etsintää y :stä. Viiva e on nyt *puuviiva* ja $\text{ISÄ}(y) = x$.
 - (2.2) Jos y :ssä on jo käyty, niin viivaa e sanotaan *paluuviiivaksi*. Etsintää jatketaan x :stä.

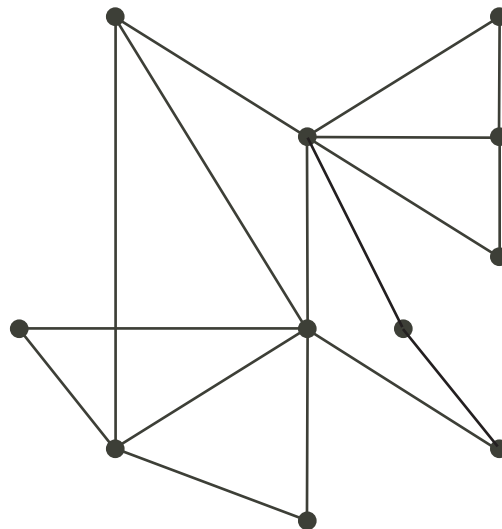
Joka kerran kun tullaan uuteen pisteeseen, jossa ei ole aikaisemmin käyty, annetaan sille juokseva numero. Juuren numero on 1. Merkitään

$$\text{DFN}(x) = \text{pisteen } x \text{ juokseva numero.}$$

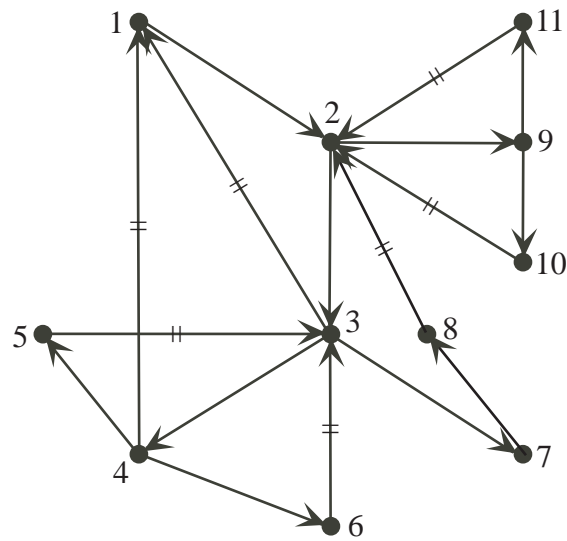
Syvyysetsintä päättyy, kun palataan juureen ja on käyty läpi kaikki pisteet (tai kun haluttua tyyppiä oleva piste/viiva tms. on löytynyt).

Loppuun asti vietyä syvyysetsintä jakaa viivat puuviivoihin ja paluuviiivoihin. Selvästi puuviivat muodostavat G :n virittävän puun, ns. *DFS-puun*. Jos puuviivojen suunnat otetaan mukaan, saadaan *suunnattu DFS-puu*. Syvyysetsintä suuntaa kaikki graafin G viivat. Kun nämä suunnat otetaan mukaan, saadaan digraafi, jonka alusgraafi on G ja jonka virittävä suunnattu puu saatu suunnattu DFS-puu on.

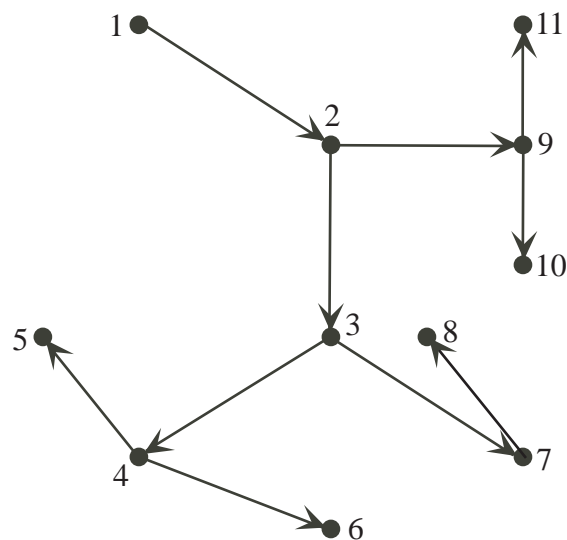
Esimerkki. Graafin



syvyysetsintä vasemmalla ylhäällä olevasta juuresta käsin etenee seuraavasti (paluuviivoja merkitään kahdella poikkiviivalla):



Vastaava suunnattu DFS-puu on



Seuraavassa

$$K(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos pisteessä } x \text{ ei ole käyty} \\ 1, & \text{jos pisteessä } x \text{ on käyty} \end{cases}$$

ja PUU sekä PALUU ovat joukkomuuttujia, joihin kerätään puuviivat sekä paluviivat suunnattuina.

Syvyysetsintä graafeille:

1. Asetetaan $PUU \leftarrow \emptyset$, $PALUU \leftarrow \emptyset$ ja $i \leftarrow 1$. Jokaiselle G :n pisteelle x asetetaan $ISÄ(x) \leftarrow 0$ ja $K(x) \leftarrow 0$.
2. Valitaan piste r , jolle $K(r) = 0$ (tämä ehto tarvitaan vain epäyhtenäisille graafeille, ks. kohta 6.). Asetetaan $DFN(r) \leftarrow i$, $K(r) \leftarrow 1$ ja $u \leftarrow r$.

3. Jos kaikki viivat, joiden päätepiste on u , on jo tarkastettu, mennään kohtaan 5. Muutoin valitaan viiva $e = (u, v)$, jota ei ole tarkastettu.
4. Suunnataan viiva e u :sta v :hen ja merkitään se tarkastetuksi.
 - 4.1 Jos $K(v) = 0$, niin asetetaan $i \leftarrow i + 1$, $DFN(v) \leftarrow i$, $PUU \leftarrow PUU \cup \{e\}$, $K(v) \leftarrow 1$, $ISÄ(v) \leftarrow u$ ja $u \leftarrow v$. Mennään kohtaan 3.
 - 4.2 Jos $K(v) = 1$, asetetaan $PALUU \leftarrow PALUU \cup \{e\}$ ja mennään kohtaan 3.
5. Jos $ISÄ(u) \neq 0$, niin asetetaan $u \leftarrow ISÄ(u)$ ja mennään kohtaan 3.
6. (Vain epäyhtenäisille graafeille, jotta päästään vaihtamaan komponenttia.) Jos on sellainen piste r , että $K(r) = 0$, asetetaan $i \leftarrow i + 1$ ja mennään kohtaan 2.
7. Lopetetaan.

Merkitään saatua suunnattua DFS-puuta T :llä ja G :stä saatua suunnattua graafia \vec{G} :llä. T on silloin \vec{G} :n virittävä suunnattu puu. Jos pisteestä u on T :ssä suunnattu polku pisteeseen v , sanotaan u :ta v :n *esi-isäksi* ja v :tä sanotaan u :n *jälkeläiseksi*. Pisteet u ja v ovat *sukulaiset*, jos toinen niistä on toisen esi-isä. Erityisesti, jos (u, v) on T :n nuoli, niin u on v :n isä ja v on u :n poika. G :n (mahdollisia) sellaisia viivoja (u, v) , missä u ja v eivät ole sukulaiset, sanotaan *poikkiviivoiksi*. Mutta itse asiassa

Väite. *Poikkiviivoja ei ole.*

Todistus. Olkoot u ja v eri pisteitä, jotka eivät ole sukulaiset. Silloin (kvasivahva yhtenäisyys) on sellaiset pisteet u' ja v' , että

- $ISÄ(u') = ISÄ(v')$,
- $u' = u$ tai u' on u :n esi-isä ja
- $v' = v$ tai v' on v :n esi-isä.

Tarkastellaan tapausta, missä $DFN(u') < DFN(v')$ (toinen mahdollisuus on ilmeisesti symmetrinen). Merkitään T_1 :llä sitä T :n suunnattua alipuuta, jonka juuri on u' , ja T_2 :lla T :n suunnattua alipuuta, jonka juuri on v' . Ilmeisesti syvyysetsintä käy läpi T_2 :n pisteet vasta sitten, kun u' on täysin käsitelty. Toisaalta u' on täysin käsitelty vasta sitten, kun kaikki T_1 :n pisteet on täysin käsitelty. Näin ollen viivaa (u, v) ei voi olla. \square

Suunnattu graafi

(Silmukattomalle yhtenäiselle) digraafille G syvyysetsintä on samantapainen kuin suuntaamattomille graafille. Etsintä jakaa G :n nuolet neljään eri luokkaan. Jos etsintä etenee tarkastamattomaan nuoleen $e = (x, y)$, on luokittelu seuraava:

- (1) Mikäli y :ssä ei ole käyty, on e *puunuoli*.
- (2) Mikäli y :ssä on käyty, saadaan kolme tapausta:
 - (2.1) y on x :n jälkeläinen jo konstruoitujen puunuolten indusoimassa suunnatussa aligraafissa. Silloin e on *menonuoli* ja $DFN(y) > DFN(x)$.

- (2.2) x on y :n jälkeläinen jo konstruoitujen puunuolten indusoimassa suunnatussa aligraafissa. Silloin e on *paluunuoli* ja $\text{DFN}(y) < \text{DFN}(x)$.
- (2.3) x ja y eivät ole sukulaiset jo konstruoitujen puunuolten välityksellä. Silloin e on *poikkinuoli* ja $\text{DFN}(y) < \text{DFN}(x)$. (*Huom!* Ei ole mahdollista, että $\text{DFN}(y) > \text{DFN}(x)$. Tämä todistetaan aivan samoin kuin eo. Väite.)

Puunuolten indusoima suunnattu G :n aligraafi on ns. *DFS-metsä* (suunnattu metsä).

Jos nuolelle (x, y) on $\text{DFN}(y) > \text{DFN}(x)$, niin (x, y) on joko puunuoli tai menonuoli. Etsinnän aikana nämä luonnollisesti erottuvat, sillä (x, y) on puunuoli, jos y :ssä ei ole käyty, muuten menonuoli. Jos taas $\text{DFN}(y) < \text{DFN}(x)$, niin (x, y) on joko paluunuoli tai poikkinuoli. Etsinnän aikana nämäkin erottuvat, sillä tällöin (x, y) on poikkinuoli, jos y on täysin käsitelty, muuten paluunuoli.

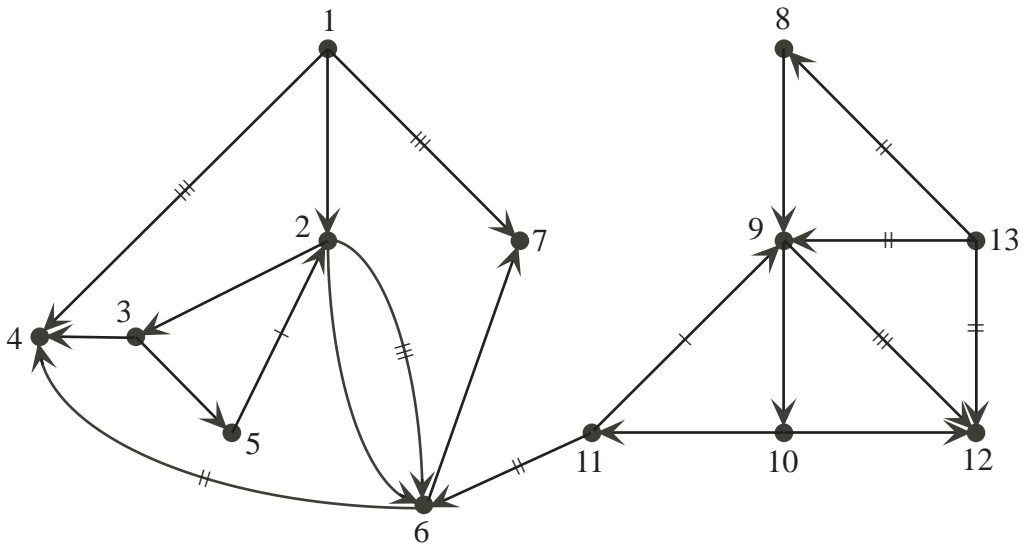
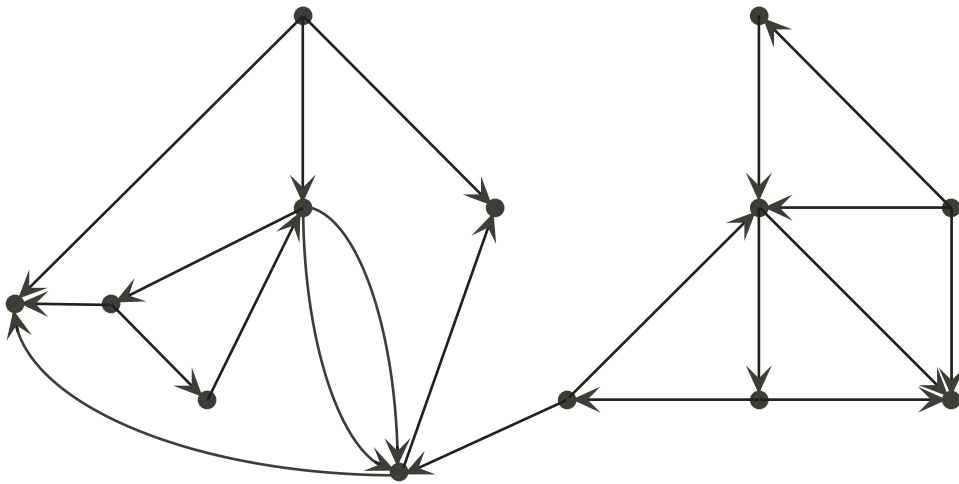
Seuraavassa K , ISÄ, PUU ja PALUU ovat kuten edellä. Uusia ovat MENO ja POIKKI (ilmeisin merkityksin) sekä

$$L(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \text{ on täysin käsitelty} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

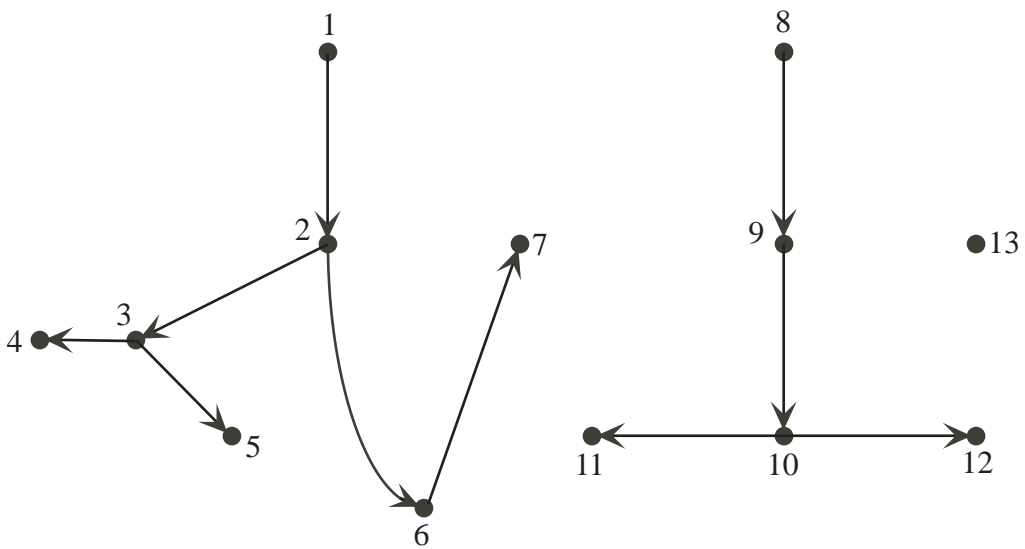
Syvyysetsintä digraafeille:

1. Asetetaan $\text{PUU} \leftarrow \emptyset$, $\text{MENO} \leftarrow \emptyset$, $\text{PALUU} \leftarrow \emptyset$, $\text{POIKKI} \leftarrow \emptyset$ ja $i \leftarrow 1$. Jokaiselle G :n pisteelle x asetetaan $\text{ISÄ}(x) \leftarrow 0$, $K(x) \leftarrow 0$ ja $L(x) \leftarrow 0$.
2. Valitaan piste r , jolle $K(r) = 0$ ja asetetaan $\text{DFN}(r) \leftarrow i$, $K(r) \leftarrow 1$ ja $u \leftarrow r$.
3. Jos kaikki nuolet, joiden alkupiste u on, on jo tarkastettu, asetetaan $L(u) \leftarrow 1$ ja mennään kohtaan 5. Muutoin valitaan nuoli $e = (u, v)$, jota ei ole tarkastettu.
4. Merkitään nuoli e tarkastetuksi.
 - 4.1 Jos $K(v) = 0$, niin asetetaan $i \leftarrow i + 1$, $\text{DFN}(v) \leftarrow i$, $\text{PUU} \leftarrow \text{PUU} \cup \{e\}$, $K(v) \leftarrow 1$, $\text{ISÄ}(v) \leftarrow u$ ja $u \leftarrow v$. Mennään kohtaan 3.
 - 4.2 Jos $K(v) = 1$ ja $\text{DFN}(v) > \text{DFN}(u)$, niin asetetaan $\text{MENO} \leftarrow \text{MENO} \cup \{e\}$ ja mennään kohtaan 3.
 - 4.3 Jos $K(v) = 1$ ja $\text{DFN}(v) < \text{DFN}(u)$ ja $L(v) = 0$, niin asetetaan $\text{PALUU} \leftarrow \text{PALUU} \cup \{e\}$ ja mennään kohtaan 3.
 - 4.4 Jos $K(v) = 1$ ja $\text{DFN}(v) < \text{DFN}(u)$ ja $L(v) = 1$, niin asetetaan $\text{POIKKI} \leftarrow \text{POIKKI} \cup \{e\}$ ja mennään kohtaan 3.
5. Jos $\text{ISÄ}(u) \neq 0$, niin asetetaan $u \leftarrow \text{ISÄ}(u)$ ja mennään kohtaan 3.
6. Jos on sellainen piste r , että $K(r) = 0$, asetetaan $i \leftarrow i + 1$ ja mennään kohtaan 2.
7. Lopetetaan.

Esimerkki. Alla olevan digraafin syvyysetsintä vasemmalla ylhäällä olevasta juuresta käsin etenee seuraavasti (paluunuolia merkitään yhdellä poikkiviivalla, poikkinuolia kahdella ja menonuolia kolmella poikkiviivalla):



Vastaava DFS-metsä on



Lause 5.1. Jos kvasivahvasti yhtenäisen digraafin syvyysetsintä aloitetaan sen juuresta, syntyvä DFS-metsä on suunnattu puu. Erityisesti vahvasti yhtenäisen digraafin DFS-metsä on suunnattu puu, aloitetaan etsintä mistä pisteestä tahansa.

Todistus. Tehdään vastaoletus: Kvasivahvasti yhtenäisen digraafin G juuresta r aloitetun syvyysetsinnän DFS-metsä T ei ole suunnattu puu.

Koska T on joka tapauksessa suunnattu metsä, ei sen se komponentti T_1 , jossa on juuri r , sisällä jotain G :n pistettä v . Toisaalta r :stä on suunnattu polku v :hen. Valitaan tältä polulta viimeinen piste u , joka on T_1 :ssä, ja nuoli $e = (u, w)$. Koska piste w ei silloin ole T_1 :ssä, nuoli e ei ole puu-, paluu- eikä menonuoli. Sen on siis oltava poikkinuoli. Koska etsintä aloitettiin juuresta r , pitää w :n kuitenkin olla T_1 :ssä (\surd).

Vahvasti yhtenäinen digraafi on kvasivahvasti yhtenäinen ja sen mikä tahansa piste voidaan valita juureksi. \square

Sukua syvyysetsinnälle on *leveysetsintä* (*breadth-first-etsintä*, *BF-etsintä*). Tarkastellaan yhtenäistä graafia G .

Leveysetsintä graafille:

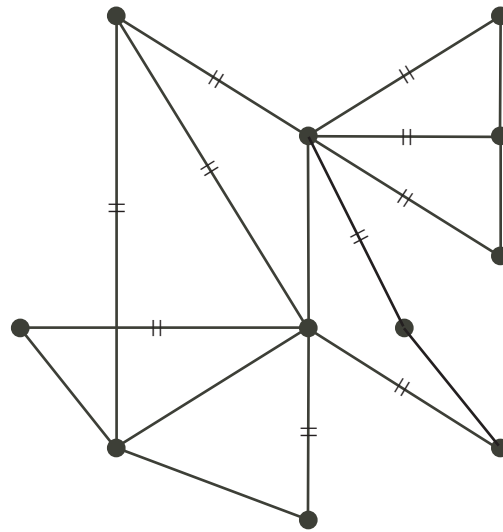
1. Aluksi pisteet ovat merkitsemättömiä. Asetetaan $i \leftarrow 0$.
2. Valitaan (merkitsemätön) lähtöpiste r (juuri) ja merkitään se i :llä.
3. Etsitään niiden merkitsemättömien pisteiden joukko J , jotka ovat vierekkäisiä jonkin i :llä merkityn pisteen kanssa.
4. Jos $J \neq \emptyset$, niin asetetaan $i \leftarrow i + 1$, merkitään J :n pisteet i :llä ja mennään kohtaan 3.
5. (Vain epäyhtenäisille graafeille, jotta päästään vaihtamaan komponenttia.) Jos kaikkia pisteitä ei ole merkitty, asetetaan $i \leftarrow 0$ ja mennään kohtaan 2.
6. Lopetetaan.

Myös leveysetsintä tuottaa yhtenäisen graafin virittävän puun, ns. *BFS-puun*, kun oksiksi otetaan joukkoa J muodostettaessa tarkastettavat viivat

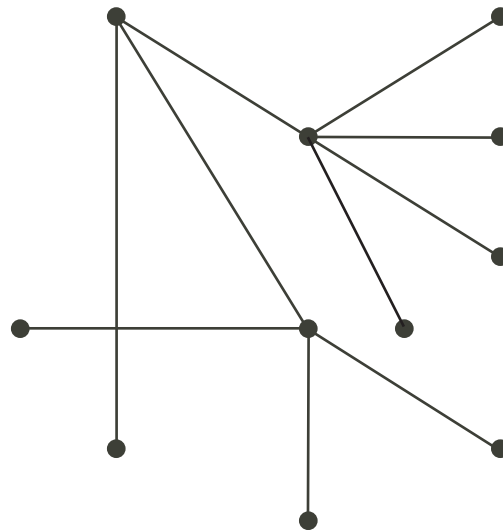
(i :llä merkitty piste, merkitsemätön piste)

(ns. *puuviivat*), yksi kutakin J :n pistettä kohti. *Suunnattu BFS-puu* saadaan, kun viivat vielä suunnataan merkitystä pisteestä merkitsemättömään. Leveysetsintä yllä esitettyssä muodossa ei kuitenkaan suuntaa kaikkia graafin viivoja. Ilmeisesti pisteen merkki on lyhimmän polun pituus juuresta pisteeseen eli pisteen *etäisyys* juuresta.

Esimerkki. Edellä esimerkissä olleen graafin leveysetsintä vasemmalla ylhäällä olevasta juuresta käsin etenee seuraavasti (puuviivoja merkitään kahdella poikkiviivalla):



Vastaava BFS-puu on



Suunnattu BFS-puu saataisiin suuntaamalla oksat juuresta poispäin.

Suunnatun graafin G leveysetsintä on paljolti samantapainen.

Leveysetsintä suunnatulle graafille:

1. Aluksi pisteet ovat merkitsemättömiä. Asetetaan $i \leftarrow 0$.
2. Valitaan merkitsemätön lähtöpiste r (juuri) ja merkitään se i :llä.
3. Etsitään niiden nuolten loppupisteiden joukko J , joiden alkupiste on merkitty i :llä ja joiden loppupistettä ei ole merkitty.
4. Jos $J \neq \emptyset$, niin asetetaan $i \leftarrow i + 1$, merkitään J :n pisteet i :llä ja mennään kohtaan 3.
5. Jos kaikkia pisteitä ei ole merkitty, asetetaan $i \leftarrow 0$ ja mennään kohtaan 2.
6. Lopetetaan.

Digraafin leveysetsintä tuottaa BFS-metsän (suunnattu metsä), kun suunnatuiksi oksiksi otetaan joukkoa J muodostettaessa tarkastettavat nuolet

(i :llä merkitty piste,merkitsemätön piste)

(ns. puunuolet), yksi kutakin J :n pistettä kohti.

Huomautus. Myös leveysetsintä voidaan modifioida siten, että se lajittelee viivoja (nuolia) kuten syvyysetsintä.

5.4 Kevyin polku: Dijkstran algoritmi

Tehtävä. Etsittävä kevyin (suunnattu) polku (di)graafin pisteestä u pisteeseen v ($\neq u$) tai todettava, ettei tällaista polkua ole, kun (di)graafin viivoille (nuolille) on annettu ei-negatiiviset painot ja polun paino on sen viivojen (nuolten) painojen summa.

Ilmeisesti voidaan olettaa, ettei tarkasteltavassa (di)graafissa ole silmukoita eikä rinnakkaisia viivoja (nuolia). Muussa tapauksessa silmukat poistetaan ja rinnakkaisista viivoista (nuolista) valitaan kevyin. Jatkossa tarkastellaan vain digraafeja. Suuntaamaton graafi voidaan korvata digraafilla, kun sen viivojen tilalle otetaan vastakkaissuuntaisten samanpainoisten nuolten parit.

Merkitään nuolen (r, s) painoa $\alpha(r, s)$:llä. Dijkstran algoritmi käyttää pisteiden merkintää, joka voi olla pysyvä tai väliaikainen. Merkitään pisteen r merkkiä $\beta(r)$:llä ja määritellään

$$\gamma(r) = \begin{cases} 1, & \text{jos merkintä on pysyvä} \\ 0, & \text{jos merkintä on väliaikainen.} \end{cases}$$

Pysyvä merkki $\beta(r)$ ilmaisee kevyimmän suunnatun $u-r$ -polun painon. Väliaikainen merkki $\beta(r)$ antaa tälle painolle ylärajan (voi olla ∞). Tarvittaessa otetaan käyttöön myös merkintä

$$\pi(r) = \begin{cases} \text{pisteen } r \text{ edeltäjä (kevyimmällä) suunnatulla } u-r\text{-polulla, jos sellainen on} \\ 0 \text{ muuten,} \end{cases}$$

jota käyttäen voidaan konstruoida ko. kevyin suunnattu polku.

Dijkstran algoritmi:

1. Asetetaan $\beta(u) \leftarrow 0$ ja $\gamma(u) \leftarrow 1$. Muille pisteille r asetetaan $\beta(r) \leftarrow \infty$ ja $\gamma(r) \leftarrow 0$. Kaikille pisteille r asetetaan $\pi(r) \leftarrow 0$. Vielä asetetaan $w \leftarrow u$.

2. Jokaiselle nuolelle (w, r) , missä $\gamma(r) = 0$, asetetaan

$$\beta(r) \leftarrow \beta(w) + \alpha(w, r) \quad \text{ja} \quad \pi(r) \leftarrow w,$$

jos $\beta(r) > \beta(w) + \alpha(w, r)$.

3. Etsitään piste r^* , jolle $\gamma(r^*) = 0$, $\beta(r^*) < \infty$ ja

$$\beta(r^*) = \min_{\gamma(r)=0} \{\beta(r)\}.$$

Asetetaan

$$\gamma(r^*) \leftarrow 1 \quad \text{ja} \quad w \leftarrow r^*.$$

Ellei mainitunlaista pistettä r^* ole, lopetetaan (suunnattuja $u-v$ -polkujakaan ei silloin ole).

4. Jos $w \neq v$, palataan kohtaan 2.

5. Lopetetaan.

Algoritmi nähdään oikeaksi seuraavasti. Merkitään (kussakin suoritusvaiheessa)

$$V_1 = \{\text{pysyvästi merkityt pisteet}\},$$

$$V_2 = \{\text{väliaikaisesti merkityt pisteet}\}.$$

$(\langle V_1, V_2 \rangle)$ on irrotus, jonka yhdellä puolella ovat jo loppuun käsitellyt pisteet ja toisella puolella ”keskeneräiset” pisteet.)

Väite. V_1 :n pisteen r merkki $\beta(r)$ on kevyimmän suunnatun $u-r$ -polun paino ja $\pi(r)$ on r :n edeltäjä (eräällä) tällaisella polulla.

Todistus. Aina askeleen 2. jälkeen pisteiden r väliaikainen merkki on kevyimmän sellaisen suunnatun $u-r$ -polun paino, jonka pisteet r :ää lukuunottamatta ovat V_1 :ssä ($= \infty$, jos tällaisia polkuja ei ole), ja $\pi(r)$ on r :n edeltäjä tällaisella polulla (tai $= 0$), sillä (kaksi tapausta):

- Ennen askelta 2. on $\beta(r) = \infty$. Ainoa ”uusi” V_1 :n piste on nyt w , joten mahdollisen suunnatun $u-r$ -polun on kuljettava sen kautta. Asia on selvä, jos tällaisia polkuja ei ole ($\beta(r)$ pysyy ∞ :nä ja $\pi(r)$ nollana). Oletetaan, että on sellainen (kevyin) suunnattu $u-r$ -polku, joka sisältää r :n lisäksi vain V_1 :n pisteitä ja erityisesti sisältää pisteen w . Osapolku u :sta w :hen on tietysti kevyin mahdollinen. Otetaan suunnatun $u-r$ -polun r :ää edeltävä piste s ($\in V_1$). Jos $s = w$, on asia selvä. Jos $s \neq w$, on s kumminkin ollut jonkin aikaisemman vaiheen w :nä, jolloin $\beta(r)$ ei voi olla $= \infty$ (kohta 2.) (\checkmark).
- Ennen askelta 2. on $\beta(r) < \infty$. Silloin $\beta(r)$ on kevyimmän sellaisen suunnatun $u-r$ -polun paino, jonka pisteet r :ää lukuunottamatta ovat joukossa $V_1 - \{w\}$. Ainoa ”uusi” V_1 :n piste on nyt w , joten mahdollisen kevyemmän suunnatun $u-r$ -polun on kuljettava sen kautta. Asia on selvä, jos tällaista kevyempää polkua ei ole ($\beta(r)$ ja $\pi(r)$ pysyvät samoina). Oletetaan, että on sellainen kevyempi suunnattu $u-r$ -polku, joka sisältää r :n lisäksi vain V_1 :n pisteitä ja erityisesti sisältää pisteen w . Osapolku u :sta w :hen on tietysti kevyin mahdollinen. Otetaan suunnatussa $u-r$ -polussa r :ää edeltävä piste s ($\in V_1$). Jos $s = w$, on asia selvä. Jos $s \neq w$, on s joukossa $V_1 - \{w\}$. Koska s on ollut jonkin aikaisemman vaiheen w :nä, on kevyin suunnattu $u-s$ -polku, joka ei sisällä pistettä w (muussa tapauksessa olisikin silloin kohdassa 3. pitänyt valita r^* :ksi s :n sijasta jokin sitä edeltävä tällaisen suunnatun $u-w-s$ -polun piste). Näin saadaan kumminkin kevyempi suunnattu $u-r$ -polku, joka sisältää r :n lisäksi vain joukon $V_1 - \{w\}$ pisteitä (\checkmark).

Pysyvä merkki on tällöin haluttu paino kohdan 3. minimoinnista johtuen ja $\pi(r)$ antaa r :ää edeltävän pisteen, kuten väitettiin. \square

Algoritmissa lopulta v saa pysyvän merkin tai prosessi pysähtyy kohtaan 3. (jolloin suunnattua $u-v$ -polkua ei ole). Kysytty suunnattu polku saadaan v :stä lähtien takaperin etsimällä π -merkintöjä käyttäen jo saadun polun pisteen y edeltäjä $\pi(y)$.

Korvaamalla kohta 4. kohdalla

4'. Mene kohtaan 2.

ja jatkamalla kunnes prosessi pysähtyy kohtaan 3., saadaan merkinnät

$$\beta(w) = \begin{cases} 0, & \text{jos } w = u \\ \text{kevyimmän suunnatun } u-w\text{-polun paino,} & \text{jos sellainen on} \\ \infty & \text{muuten} \end{cases}$$

ja

$$\pi(w) = \begin{cases} w\text{:n edeltäjä kevyimmällä suunnatulla } u-w\text{-polulla,} & \text{jos sellainen on ja } w \neq u \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Huomautus. Dijkstran algoritmi ei toimi, jos mukana on negatiivisia painoja. Tällaista tapaus-ta käsitellään seuraavassa pykälässä.

5.5 Kevyin polku: Floydin algoritmi

Tehtävä. Etsittävä kevyin suunnattu polku digraafin pisteestä u pisteeseen v ($\neq u$) tai todetta-va, ettei tällaista polkua ole, kun digraafin nuolille on annettu mielivaltaiset painot ja suunnatun polun paino on sen nuolten painojen summa.

Ilmeisesti voidaan olettaa, ettei tarkasteltavassa digraafissa ole silmukoita eikä rinnakkaisia sa-mansuuntaisia nuolia. Muussa tapauksessa silmukat poistetaan ja rinnakkaisista nuolista va-litaan kevyin. Floydin algoritmi soveltuu vain digraafeille. Merkitään nuolen (x, y) painoa $\alpha(x, y)$:llä ja muodostetaan painomatriisi $\mathbf{W} = (w_{ij})$, missä

$$w_{ij} = \begin{cases} \alpha(v_i, v_j), & \text{jos on nuoli } (v_i, v_j) \\ \infty & \text{muuten.} \end{cases}$$

(Tässä tavan mukaan $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ on digraafin pistejoukko.) Floydin algoritmi on saman-tapainen kuin Warshallin algoritmi. Se toimii vain, jos digraafissa ei ole painoltaan negatiivisia syklejä. Tällöin kevyin suunnattu polku on myös kevyin suunnattu kulku.

Floydin algoritmi konstruoi painomatriisien jonon $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n$, missä $\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}$ ja

$$(\mathbf{W}_k)_{ij} = \text{kevyimmän sellaisen suunnatun } v_i-v_j\text{-polun paino,} \\ \text{jossa } v_i\text{:n ja } v_j\text{:n lisäksi esiintyy vain pisteitä } v_1, \dots, v_k \\ (= \infty, \text{ jos ko. polkua ei ole}).$$

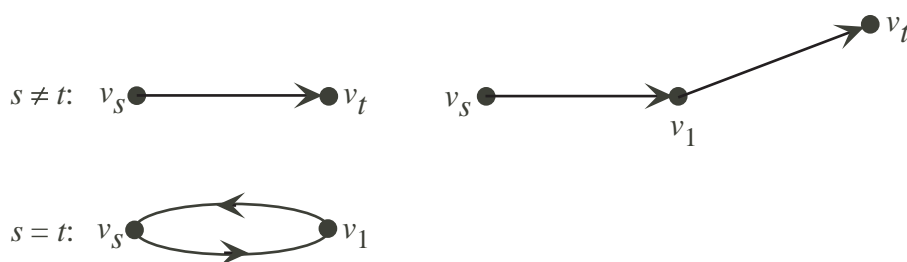
Väite. Kun \mathbf{W}_k lasketaan \mathbf{W}_{k-1} :stä kaavalla

$$(\mathbf{W}_k)_{st} = \min\{(\mathbf{W}_{k-1})_{st}, (\mathbf{W}_{k-1})_{sk} + (\mathbf{W}_{k-1})_{kt}\},$$

niin saadaan ym. painomatriisien jono. Jos digraafissa on painoltaan negatiivisia syklejä, jono on oikea aina siihen asti, kun ensimmäisen kerran lävistäjälle tulee negatiivinen alkio.

Todistus. Käytetään induktiota k :n suhteen.

Induktion lähtökohta: $k = 1$. Koska digraafissa ei ole silmukoita, \mathbf{W}_0 :n lävistäjällä on vain ∞ :iä. Kyseinen kevyin suunnattu polku (jos olemassa) on jokin seuraavista:



Väite on tällöin ilmeinen.

Induktio-oletus: Väite on oikea, kun $k < \ell$. ($\ell \geq 2$)

Induktioväite: Väite on oikea, kun $k = \ell$.

Induktioväitteen todistus: Jotta tähän k :n arvoon päästäisiin, on $\mathbf{W}_{\ell-1}$:n lävistäjällä oltava vain ei-negatiivisia alkioita (∞ mukaanlukien). Katsotaan tilannetta, missä $s \neq t$. (Tapaus $s = t$ on aivan analoginen.) Saadaan viisi tapausta:

- Piste v_ℓ on välttämättä kyseisellä kevyimmällä suunnatulla polulla, mutta ei ole kumpikaan pisteistä v_s tai v_t , ts. $\ell \neq s, t$. Tarkastellaan suunnattua osapolkua v_s :stä v_ℓ :ään. Jos tämä ei olisi kevyin sellainen suunnattu v_s - v_ℓ -polku, että sen muut pisteet kuin v_s ja v_ℓ ovat joukossa $\{v_1, \dots, v_{\ell-1}\}$, niin kevyimmällä tällaisella suunnatulla v_s - v_ℓ -polulla on muitakin yhteisiä pisteitä suunnatun osapolun v_ℓ :stä v_t :hen kanssa kuin v_ℓ , sanotaan piste v_p . Näin saatu suunnattu v_s - v_p - v_ℓ - v_t -kulku olisi kevyempi kuin alunperin tarkasteltu suunnattu v_s - v_t -polku. Poistamalla siitä syklit saataisiin näin ollen edelleen sellainen suunnattu v_s - v_t -polku, joka on kevyempi kuin alunperin tarkasteltu ja sisältää v_s :n ja v_t :n lisäksi vain pisteitä v_1, \dots, v_ℓ (\checkmark). (Muista, että tällaisten syklien painot ovat ei-negatiivisia!) Siis suunnattu osapolku v_s :stä v_ℓ :ään on kevyin suunnattu v_s - v_ℓ -polku, jossa v_s :n ja v_ℓ :n lisäksi esiintyy vain pisteitä $v_1, \dots, v_{\ell-1}$. Vastaavasti suunnattu osapolku v_ℓ :stä v_t :hen on kevyin suunnattu v_ℓ - v_t -polku, jossa v_ℓ :n ja v_t :n lisäksi esiintyy vain pisteitä $v_1, \dots, v_{\ell-1}$. Induktio-oletuksen nojalla nyt

$$(\mathbf{W}_\ell)_{st} < (\mathbf{W}_{\ell-1})_{st}$$

(huomaa erityisesti tapaus $(\mathbf{W}_{\ell-1})_{st} = \infty$) ja

$$(\mathbf{W}_\ell)_{st} = (\mathbf{W}_{\ell-1})_{s\ell} + (\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell t}.$$

- Kyseinen suunnattu v_s - v_t -polku on olemassa ja $v_\ell = v_s$. Induktio-oletuksen nojalla $(\mathbf{W}_\ell)_{st} = (\mathbf{W}_{\ell-1})_{st}$ ja

$$(\mathbf{W}_{\ell-1})_{s\ell} + (\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell t} = (\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell\ell} + (\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell t} \geq (\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell t} = (\mathbf{W}_{\ell-1})_{st},$$

sillä $(\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell\ell} \geq 0$ (mahdollisesti $= \infty$).

- Kyseinen suunnattu v_s - v_t -polku on olemassa ja $v_\ell = v_t$. Induktio-oletuksen nojalla $(\mathbf{W}_\ell)_{st} = (\mathbf{W}_{\ell-1})_{st}$ ja

$$(\mathbf{W}_{\ell-1})_{s\ell} + (\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell t} = (\mathbf{W}_{\ell-1})_{s\ell} + (\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell\ell} \geq (\mathbf{W}_{\ell-1})_{s\ell} = (\mathbf{W}_{\ell-1})_{st},$$

sillä $(\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell\ell} \geq 0$ (mahdollisesti $= \infty$).

- Kyseinen suunnattu v_s-v_t -polku on olemassa, mutta v_ℓ ei ole tällä suunnatulla polulla. Muodostetaan nyt, mikäli mahdollista, kevyin suunnattu v_s-v_ℓ -polku ja kevyin suunnattu $v_\ell-v_t$ -polku, joissa päätepisteiden lisäksi esiintyy vain pisteitä $v_1, \dots, v_{\ell-1}$. Yhdistämällä nämä saadaan suunnattu v_s-v_t -kulku. Poistamalla tästä suunnatusta kulusta (mahdolliset) syklit saadaan yhtä kevyt tai kevyempi suunnattu v_s-v_t -polku, jossa päätepisteiden lisäksi esiintyy vain pisteitä v_1, \dots, v_ℓ . (Muista, että tällaisten syklien painot ovat ei-negatiivisia!) Siispä tässä tapauksessa

$$(\mathbf{W}_{\ell-1})_{s\ell} + (\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell t} \geq (\mathbf{W}_{\ell-1})_{st}$$

ja väitteessä mainittu laskukaava antaa oikean tuloksen. Jos taas mainitunlaista suunnattua v_s-v_ℓ -polkua tai $v_\ell-v_t$ -polkua ei ole, on asia ilmeinen.

- Kyseistä suunnattua v_s-v_t -polkua ei ole. Silloin $(\mathbf{W}_\ell)_{st} = \infty$ ja $(\mathbf{W}_{\ell-1})_{st} = \infty$. Toisaalta myös ainakin toinen alkioista $(\mathbf{W}_{\ell-1})_{s\ell}$ ja $(\mathbf{W}_{\ell-1})_{\ell t}$ on $= \infty$, sillä muutoin saataisiin vastaavista suunnatuista v_s-v_ℓ - ja $v_\ell-v_t$ -poluista yhdistämällä ja (mahdolliset) syklit poistamalla kumminkin halutunlainen suunnattu v_s-v_t -polku (\checkmark).

□

Floydin algoritmi konstruoi myös toisen matriisijonon $\mathbf{Z}_0, \dots, \mathbf{Z}_n$, mihin talletetaan kevyintä suunnattua polkua muodossa

$$(\mathbf{Z}_k)_{ij} = \begin{cases} \ell, \text{ missä } v_\ell \text{ on } v_i\text{:tä seuraava piste kevyimmällä sellaisella suunnatulla} \\ v_i-v_j\text{-polulla, jolla } v_i\text{:n ja } v_j\text{:n lisäksi on vain pisteitä } v_1, \dots, v_k, \\ \text{mikäli tällaisia suunnattuja polkuja on} \\ 0 \text{ muutoin.} \end{cases}$$

Ilmeisesti

$$(\mathbf{Z}_0)_{ij} = \begin{cases} j, \text{ jos } (\mathbf{W})_{ij} \neq \infty \\ 0 \text{ muutoin.} \end{cases}$$

Jonon matriisi \mathbf{Z}_k ($k \geq 1$) saadaan edellisestä matriisista \mathbf{Z}_{k-1} kaavalla

$$(\mathbf{Z}_k)_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{Z}_{k-1})_{ik}, \text{ jos } (\mathbf{W}_{k-1})_{ik} + (\mathbf{W}_{k-1})_{kj} < (\mathbf{W}_{k-1})_{ij} \\ (\mathbf{Z}_{k-1})_{ij} \text{ muuten,} \end{cases}$$

joten jono voidaan muodostaa samaa tahtia jonon $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n$ kanssa. Kaiken kaikkiaan Floydin algoritmi on seuraava. Mukaan on myös liitetty lävistäjäalkioiden ei-negatiivisuuden testaus sekä matriisijonon $\mathbf{Z}_0, \dots, \mathbf{Z}_n$ muodostus.

procedure Floyd

begin

$\mathbf{W} := \mathbf{W}_0$

$k := 0$

for $i := 1$ **to** n **do**

for $j := 1$ **to** n **do**

if $(\mathbf{W})_{ij} = \infty$ **then**

$(\mathbf{Z})_{ij} := 0$

else

$(\mathbf{Z})_{ij} := j$

```

        fi
    od
od
while  $k < n$  and Testi(W) do
    Iteraatio(W, Z, k)
od
end

subprocedure Testi(W)
begin
    for  $i := 1$  to  $n$  do
        if  $(W)_{ii} < 0$  then
            return FALSE
        fi
    od
    return TRUE
end

subprocedure Iteraatio(W, Z, k)
begin
     $k := k + 1$ 
    for  $i := 1$  to  $n$  do
        for  $j := 1$  to  $n$  do
            if  $(W)_{ik} + (W)_{kj} < (W)_{ij}$  then
                 $(W)_{ij} := (W)_{ik} + (W)_{kj}$ 
                 $(Z)_{ij} := (Z)_{ik}$ 
            fi
        od
    od
end

```

5.6 Kevyin virittävä puu: Kruskalin algoritmit ja Primin algoritmi

Tehtävä. Etsittävä yhtenäisen graafin kevyin virittävä puu, kun graafin viivoille on annettu mielivaltaiset painot ja puun paino on sen oksien painojen summa.

Ilmeisesti voidaan olettaa, että tarkasteltava graafi $G = (V, E)$ on ei-triviaali ja yksinkertainen. Muussa tapauksessa silmukat poistetaan ja rinnakkaisista viivoista valitaan kevyin. Merkitään viivan e painoa $\alpha(e)$:llä ja virittävän puun T painoa $\gamma(T)$:llä. Tavalliseen tapaan merkitään G :n pistelukua n :llä ja viivalukua m :llä sekä $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ja $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Kahden G :n virittävän puun T_1 ja T_2 etäisyys on

$$n - 1 - \#(T_1 \cap T_2) =_{\text{merk.}} d(T_1, T_2),$$

missä $\#(T_1 \cap T_2)$ on T_1 :n ja T_2 :n leikkauksen viivojen lukumäärä. Ilmeisesti $d(T_1, T_2) = 0$ tarkalleen silloin, kun $T_1 = T_2$. Jos $d(T_1, T_2) = 1$, niin T_1 ja T_2 ovat *naapuripuut*.

G :n virittävä puu T on *irrotusminimaalinen*, jos jokaiselle oksalle b sen määrittämän perusirrotusjoukon viivojen painot ovat $\geq \alpha(b)$. Vastaavasti virittävä puu T on *piiriminimaalinen*,

jos T^* :n jokaiselle siteelle c sen määrittämän peruspiirin viivojen painot ovat $\leq \alpha(c)$. Vielä G :n virittävä puu T on *lokaalisesti minimaalinen*, jos $\gamma(T) \leq \gamma(T')$ jokaiselle T :n naapuripuulle T' .

Apulause. *Seuraavat kolme ehtoa ovat ekvivalentit virittävälle puulle T :*

- (i) T on irrotusminimaalinen.
- (ii) T on piiriminimaalinen.
- (iii) T on lokaalisesti minimaalinen.

Todistus. (i) \Rightarrow (ii): Oletetaan, että T on irrotusminimaalinen ja tarkastellaan T :n peruspiiriä C , jonka määrittää T^* :n side c . Muut C :n viivat kuin c ovat T :n oksia. Kukin tällainen oksa b määrittää T :n perusirrotusjoukon, jossa on mukana c (Lause 2.7). Näin ollen $\alpha(b) \leq \alpha(c)$.

(ii) \Rightarrow (iii): Oletetaan, että T on piiriminimaalinen ja tarkastellaan T :n naapuripuuta T' . T' :ssa on (tarkalleen yksi) oksa e' , joka ei ole T :ssä, ts. e' on T^* :n side. Tarkastellaan e' :n määrittämää T :n peruspiiriä C . Kaikki C :n viivat eivät ole T' :ssa. Valitaan C :stä tällainen viiva e . e on silloin T :n oksa (itse asiassa ainoa T :n oksa, joka ei ole T' :ssa). Poistetaan nyt T :stä oksa e ja lisätään siihen sen jälkeen viiva e' . Tuloksen täytyy olla T' . Piiriminimaalisuudesta johtuen $\alpha(e') \geq \alpha(e)$, ts. $\gamma(T') \geq \gamma(T)$.

(iii) \Rightarrow (i): Tarkastellaan lokaalisesti minimaalista virittävää puuta T . Otetaan mielivaltainen T :n oksa b , sen määrittämä perusirrotusjoukko I ja mielivaltainen I :n side $c \neq b$. Silloin b kuuluu c :n määrittämään T :n peruspiiriin (Lause 2.8). Poistamalla T :stä oksa b ja lisäämällä siihen sen jälkeen viiva c saadaan näin ollen T :n naapuripuu T' . Lokaalisesta minimaalisuudesta johtuen $\gamma(T) \leq \gamma(T')$, ts. $\alpha(c) \geq \alpha(b)$. \square

Virittävä puu T on *minimaalinen*, jos sen paino on pienin mahdollinen.

Lause 5.2. *Seuraavat kolme ehtoa ovat ekvivalentit virittävälle puulle T :*

- (i) T on irrotusminimaalinen.
- (ii) T on piiriminimaalinen.
- (iii) T on minimaalinen.

Todistus. Apulauseen nojalla (i) ja (ii) ovat ekvivalentit. Minimaalinen virittävä puu on ilmeisesti lokaalisesti minimaalinen. Näin ollen riittää todistaa, että irrotusminimaalinen virittävä puu on myös minimaalinen. Asetetaan vasta oletus: On olemassa irrotusminimaalinen virittävä puu T , joka ei ole minimaalinen. Tarkastellaan minimaalista virittävää puuta T' ja valitaan T ja T' siten, että etäisyys $d(T, T')$ on pienin mahdollinen. Apulauseen nojalla $d(T, T') > 1$.

T :ssä on oksa e , joka ei ole T' :ssa, ts. se on $(T')^*$:n side. Merkitään e :n määrittämää T :n perusirrotusjoukkoa I :llä ja e :n määrittämää T' :n peruspiiriä C :llä. Leikkauksessa $I \cap C$ on muitakin viivoja kuin e (Lause 2.6). Valitaan tällainen viiva e' . Silloin e' on T^* :n side ja T' :n oksa. T :n irrotusminimaalisuudesta johtuen $\alpha(e') \geq \alpha(e)$. T' :n (piiri)minimaalisuudesta johtuen puolestaan $\alpha(e') \leq \alpha(e)$. Näin ollen $\alpha(e') = \alpha(e)$. Poistamalla nyt T' :stä sen oksa e' ja lisäämällä siihen sen jälkeen viiva e saadaan samanpainoinen ja siis myös minimaalinen virittävä puu T'' . Mutta $d(T, T'') < d(T, T')$. \checkmark \square

Kruskalin algoritmissa graafin G viivat (ja niiden painot) annetaan listana e_1, \dots, e_m . Algoritmi konstruoi piiriminimaalisen G :n virittävän puun käymällä läpi listaa ja ottamalla siitä

mukaan viivoja virittävän puun oksiksi. Erityisen tehokkaasti tämä sujuu, jos viivat on listattu kasvavan painon mukaiseen järjestykseen.

Duaalisessa Kruskalin algoritmissa puolestaan konstruoidaan irrotusminimaalinen G :n virittävä puu käymällä läpi listaa ja ottamalla siitä viivoja virittävän vastapuun siteiksi. Erityisen tehokas versio saadaan jälleen, jos viivat on listattu laskevan painon mukaiseen järjestykseen.

Kaiken kaikkiaan saadaan näin neljä eri versiota Kruskalin algoritmeja. (Muista, että viivajoukon A indusoimaa aligraafia merkitään $\langle A \rangle$:lla.)

Kruskalin 1. algoritmi

Tässä oletetaan, että viivat annetaan *kasvavan painon* mukaisessa järjestyksessä.

1. Asetetaan $k \leftarrow 1$ ja $A \leftarrow \emptyset$.
2. Jos e_k ei muodosta piiriä A :ssa olevien viivojen kanssa, niin asetetaan $A \leftarrow A \cup \{e_k\}$ sekä $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 4.
3. Jos taas e_k muodostaa piirin A :ssa olevien viivojen kanssa, niin asetetaan $k \leftarrow k + 1$ sekä mennään kohtaan 4.
4. Jos (V, A) ei ole puu, mennään kohtaan 2. Muutoin lopetetaan ja tulostetaan virittävä puu $T = \langle A \rangle$.

Aina, kun viiva jätetään pois A :sta (kohta 3.), sen päätepisteet ovat yhdistetyt A :ssa jo olevien viivojen välityksellä. Näin ollen G :n pisteet ovat yhdistetyt T :ssä samalla tavoin kuin G :ssäkin. Koska T ilmeisesti (kohta 3.) on myös piiritön, se on G :n virittävä puu. Kussakin vaiheessa T^* :n siteeksi tulevan viivan (kohta 3.) määrittämän peruspiirin oksat ovat sitä listassa edeltäviä viivoja. Näin ollen T on piiriminimaalinen ja siis minimaalinen.

Huomautus. *Kussakin vaiheessa jo saadut oksat ja siteet ovat pysyviä. Viivoja ei välttämättä tarvitse tässä tietää etukäteen, kunhan ne saadaan yksitellen kasvavan painon mukaisessa järjestyksessä. Graafin rangi (eli sen virittävän puun oksien lukumäärä) pitää silloin kuitenkin tietää etukäteen, jotta voidaan lopettaa.*

Kruskalin 2. algoritmi

Tässä viivat annetaan *mielivaltaisessa* järjestyksessä.

1. Asetetaan $k \leftarrow 1$ ja $A \leftarrow \emptyset$.
2. Jos $\langle A \cup \{e_k\} \rangle$:ssa ei ole piirejä, niin asetetaan $A \leftarrow A \cup \{e_k\}$ sekä $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 4.
3. Jos taas $\langle A \cup \{e_k\} \rangle$:ssa on piiri C , niin valitaan C :n painoltaan suurin viiva e (mikä tahansa käy, jos on vaihtoehtoja), asetetaan $A \leftarrow (A \cup \{e_k\}) - \{e\}$ sekä $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 4.
4. Jos $k \leq m$, mennään kohtaan 2. Muutoin lopetetaan ja tulostetaan virittävä puu $T = \langle A \rangle$.

Aina, kun viiva jätetään pois A :sta (kohta 3.), sen päätepisteet ovat yhdistetyt A :ssa jo olevien viivojen välityksellä. Näin ollen G :n pisteet ovat yhdistetyt T :ssä samalla tavoin kuin G :ssäkin. Koska T ilmeisesti (kohta 3.) on myös piiritön, se on G :n virittävä puu.

T :n piiriminimaalisuus (ja minimaalisuus) nähdään seuraavasti. Koko algoritmin suorituksen ajan $\langle A \rangle$ on metsä, kun ollaan kohdassa 4. Edelleen todetaan, että jos pisteet u ja w ovat

yhdistetyt $\langle A \rangle$:ssa jossakin vaiheessa, niin ne ovat sitä myös sen jälkeen. $\langle A \rangle$:ssa oleva $u-w$ -polku on yksikäsitteinen, mutta saattaa muuttua toiseksi myöhemmin mentäessä kohdan 3. kautta. Kuitenkin, aina kun tällainen muutos tapahtuu, polun viivojen painojen maksimiarvo ei voi kasvaa. Jokainen T^* :n side c on poistettu A :sta kohdan 3. kautta kuljettaessa. Tällöin c :n paino on vähintään yhtä suuri kuin C :n muiden viivojen painot. Mainitun kohdan 3. suorituksen jälkeen (ainoa) yhteys c :n päätepisteiden välillä $\langle A \rangle$:ssa kulkee C :n jäljellä olevien viivojen kautta. Lopullinen yhteys c :n päätepisteiden välillä T :ssä taas kulkee c :n määrittämän peruspiirin viivojen kautta. Näin ollen ko. peruspiirin viivojen painot ovat $\leq \alpha(c)$.

Huomautus. *Kussakin vaiheessa jo saadut siteet (kohdan 3. viivat e) ovat pysyviä, oksat eivät. Viivoja ei välttämättä tarvitse tietää etukäteen, riittää kun ne saadaan yksitellen. Etukäteen pitää silloin kuitenkin tietää graafin nulliteetti (eli sen virittävän vastapuun siteiden lukumäärä), jotta voitaisiin lopettaa. Algoritmia voidaan käyttää myös minimaalisen virittävän puun päivitykseen, jos graafin lisätään viivoja tai niiden painoja lasketaan.*

Kruskalin 3. algoritmi

Tässä oletetaan, että viivat annetaan *vähenevän painon* mukaisessa järjestyksessä.

1. Asetetaan $A \leftarrow E$ ja $k \leftarrow 1$.
2. Jos $(V, A - \{e_k\})$ on yhtenäinen, asetetaan $A \leftarrow A - \{e_k\}$ sekä $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 4.
3. Jos taas $(V, A - \{e_k\})$ on epäyhtenäinen, asetetaan $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 4.
4. Jos (V, A) ei ole puu, mennään kohtaan 2. Muutoin lopetetaan ja tulostetaan virittävä puu $T = (V, A)$.

T on ilmeisesti yhtenäinen, sillä aina kohtaan 4. tultaessa (V, A) on yhtenäinen. Toisaalta T :ssä ei ole piirejä. Jos nimittäin G :n piiri C olisi T :ssä ja c olisi sen viiva, niin c tulee poistetuksi A :sta kohdan 2. kautta kuljettaessa siinä vaiheessa, kun $e_k = c$ (\checkmark). Näin ollen T on G :n virittävä puu. Kussakin vaiheessa T :n oksaksi tulevan viivan (kohta 3.) määrittämän perusirrotusjoukon siteet ovat sitä listassa edeltäviä viivoja. Näin ollen T on irrotusminimaalinen ja siis minimaalinen.

Huomautus. *Kussakin vaiheessa jo saadut oksat ja siteet ovat pysyviä. Viivat on tiedettävä etukäteen. Niiden painoja ei sen sijaan tarvitse tietää etukäteen, riittää kun ne saadaan yksitellen laskevassa järjestyksessä.*

Kruskalin 4. algoritmi

Tässä viivat annetaan *mielivaltaisessa* järjestyksessä.

1. Asetetaan $A \leftarrow E$ ja $k \leftarrow 1$.
2. Jos $(V, A - \{e_k\})$ on yhtenäinen, asetetaan $A \leftarrow A - \{e_k\}$ sekä $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 4.
3. Jos taas $(V, A - \{e_k\})$ on epäyhtenäinen, niin siinä on kaksi komponenttia. Vastaavat pistejoukot muodostavat G :n irrotuksen $\langle V_1, V_2 \rangle$. Valitaan $\langle V_1, V_2 \rangle$:sta (viivajoukoksi tulkituna) painoltaan pienin viiva e (mikä tahansa käy, jos on vaihtoehtoja). Asetetaan $A \leftarrow (A - \{e_k\}) \cup \{e\}$ sekä $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 4.

4. Jos $k \leq m$, mennään kohtaan 2. Muutoin lopetetaan ja tulostetaan virittävä puu $T = (V, A)$.

T on ilmeisesti yhtenäinen, sillä aina kohtaan 4. tultaessa (V, A) on yhtenäinen. (Huomaa erityisesti, että kohdan 3. kautta kuljettaessa yhtenäisyys säilyy.) Toisaalta T :ssä ei ole piirejä. Jos nimittäin G :n piiri C olisi T :ssä ja c olisi sen listassa ensimmäisenä esiintyvä viiva, niin c tulee poistetuksi A :sta kohdan 2. kautta kuljettaessa siinä vaiheessa, kun $e_k = c$. (Huomaa, että piiristä ensimmäisenä poistettua viivaa ei voida poistaa kohdan 3. kautta kuljettaessa.) Mikäli c tulee takaisin myöhemmin (kohdan 3. kautta kuljettaessa), se muodostaa yksinään (V, A) :n irrotusjoukon, jolloin jokin toinen C :n viivoista on poistettu. Näin jatkaen todetaan, etteivät kaikki C :n viivat voi olla lopuksi A :ssa (\checkmark). Näin ollen T on G :n virittävä puu.

T on myös irrotusminimaalinen ja siis minimaalinen, sillä jokainen sen oksista b tulee mukaan kohdan 3. kautta. b :n määrittämän perusirrotusjoukon siteet ovat joko silloisen tarkasteltavan irrotuksen $\langle V_1, V_2 \rangle$ viivoja tai myöhemmin kohdan 3. kautta kuljettaessa tavattavien vastaavien irrotusten viivoja. Mikäli tällaisen irrotuksen viiva ”poistuu” myöhemmin oltaessa kohdassa 3., se ”korvautuu” aina b :tä painavammilla viivoilla, jotka ovat silloisen tarkasteltavan irrotuksen $\langle V_1, V_2 \rangle$ viivojen joukossa. Näin ollen b :n määrittämän perusirrotusjoukon viivojen painot ovat $\geq \alpha(b)$.

Huomautus. Kussakin vaiheessa jo saadut oksat (kohdan 3. viivat e) ovat pysyviä, siteet eivät. Viivat on tiedettävä etukäteen. Niiden painoja ei sen sijaan tarvitse tietää etukäteen, riittää kun ne saadaan yksitellen. Algoritmia voidaan käyttää myös minimaalisen virittävän puun päivitykseen, jos graafin viivoja poistetaan tai niiden painoja nostetaan.

Primin algoritmi

Primin algoritmissa (tunnetaan myös *Jarnikin algoritmia*) annetaan graafin G täysi insidenssimatriisi. Jos merkitään $\Omega(v)$:llä niiden viivojen joukkoa, joiden päätepiste on v , niin vastaavasti voidaan antaa lista $\Omega(v_1), \dots, \Omega(v_n)$, ts. pisteiden määräämät irrotukset (viivajoukoiksi tulkittuina). Lisäksi annetaan tietysti viivojen painot.

Algoritmi toimii Dijkstran algoritmin tapaan konstruoiden virittävää puuta oksa oksalta. Muuttujina ovat A (saatujen puun oksien joukko), B (saatujen puun pisteiden joukko) sekä I (irrotus, viivajoukoksi tulkittuna, josta puun seuraava oksa otetaan).

Primin algoritmi (1. versio):

1. Valitaan lähtöpiste r ja asetetaan $A \leftarrow \emptyset$, $B \leftarrow \{r\}$ sekä $I \leftarrow \Omega(r)$.
2. Valitaan I :stä painoltaan kevyin viiva e (mikä tahansa käy, jos on valinnan varaa). Oteetaan se e :n päätepiste v , joka ei ole B :ssä. Asetetaan $A \leftarrow A \cup \{e\}$, $B \leftarrow B \cup \{v\}$ ja $I \leftarrow I \oplus \Omega(v)$ sekä mennään kohtaan 3. (Muista, että \oplus merkitsee joukkojen symmetristä erotusta, ks. sivu 11.)
3. Jos $B \neq V$, mennään kohtaan 2. Muutoin tulostetaan virittävä puu $T = (B, A) = \langle A \rangle$.

Koska uusi viiva e valitaan irrotuksesta, T :ssä ei ole piirejä. Toisaalta, koska r :stä on polku jokaiseen toiseen pisteeseen, T :hen tulee kaikki G :n pisteet ja se on yhtenäinen. T on näin ollen virittävä puu. Se on myös minimaalinen, sillä

Väite. Koko Primin algoritmin suorituksen ajan (B, A) on jonkin G :n minimaalisen virittävän puun alipuu.

Todistus. Käytetään induktiota B :n pisteiden lukumäärän ℓ suhteen.

Induktion lähtökohta: $\ell = 1$. Asia on ilmeinen, sillä (B, A) on triviaali.

Induktio-oletus: Tulos on oikea, kun $\ell = k - 1$. ($k \geq 2$)

Induktioväite: Tulos on oikea, kun $\ell = k$.

Induktioväitteen todistus: Kohdassa 2. voidaan kirjoittaa $A = A' \cup \{e\}$, missä $e \in I'$, ja $B = B' \cup \{v\}$, missä induktio-oletuksen mukaan (B', A') on erään kevyimmän virittävän puun T_{\min} alipuu. Jos e on T_{\min} :ssä, on asia selvä. Muutoin $T_{\min} + e$:ssä on (perus)piiri C ja C :ssä on toinenkin I' :n viiva e' (Lause 2.6). Silloin $\alpha(e') \geq \alpha(e)$ ja $(T_{\min} + e) - e'$ on myös kevyin virittävä puu ja (B, A) on sen alipuu. (T_{\min} :n piiriminaalisuudesta johtuen $\alpha(e') \leq \alpha(e)$.)

□

Usein Primin algoritmissa käytetään apuna yhtä tai useampaa pisteiden merkintää. Seuraavassa käytetään kahta pisteiden merkintää $\pi(v)$ ja $\beta(v)$, joilla suoritetaan yo. version kohta 2. tehokkaasti. Merkinnän π arvot ovat painoja (mukaanlukien ∞) ja β :n arvot ovat viivoja (tai = 0). Muutoin algoritmi toimii kuten ylläolevakin.

Primin algoritmi (2. versio):

1. Valitaan lähtöpiste r ja asetetaan $\pi(r) \leftarrow 0$. Kaikille muille pisteille v asetetaan $\pi(v) \leftarrow \infty$. Vielä asetetaan $\beta(v) \leftarrow 0$ kaikille pisteille v sekä $A \leftarrow \emptyset$ ja $B \leftarrow \emptyset$.
2. Valitaan jokin piste $u \notin B$, jolle

$$\pi(u) = \min_{v \notin B} \{\pi(v)\}.$$

Asetetaan $B \leftarrow B \cup \{u\}$. Jos $\beta(u) \neq 0$, niin asetetaan $A \leftarrow A \cup \{\beta(u)\}$.

3. Käydään läpi järjestyksessä kaikki viivat $e = (u, v)$, missä $v \notin B$. Jos $\alpha(e) < \pi(v)$, asetetaan $\pi(v) \leftarrow \alpha(e)$ ja $\beta(v) \leftarrow e$.
4. Jos $B \neq V$, mennään kohtaan 2. Muutoin tulostetaan virittävä puu $T = (B, A) = \langle A \rangle$.

5.7 Kevyin Hamiltonin piiri eli kaupparatsuprobleema: Hehkutus algoritmi. Karp–Held-heuristiikka

Tehtävä. *Etsittävä, mikäli mahdollista, graafista kevyin Hamiltonin piiri, ts. piiri, joka sisältää kaikki graafin pisteet. Graafin viivojen painot on annettu ja (suunnatun) piirin paino on sen viivojen painojen summa.*

Ilmeisesti voidaan olettaa, että graafi on ei-triviaali, yhtenäinen (muussa tapauksessa ei koko Hamiltonin piiriä ole) ja yksinkertainen. Tarvittaessa poistetaan silmukat ja valitaan rinnakkaisista viivoista kevyin. Tavalliseen tapaan merkitään graafin G :n pistelukua n :llä ja viivalukua m :llä sekä $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ja $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Merkitään viivan $e = (v_i, v_j)$ painoa merkinnällä $\alpha(e) = \alpha(v_i, v_j)$ ja Hamiltonin piirin H painoa $\gamma(H)$:llä. Sovitaan vielä, että Hamiltonin piirin ”ensimmäinen” piste on v_1 .

Tehtävä voidaan myös esittää suunnatulle graafille G , jolloin kyse on kevyimmästä suunnatusta Hamiltonin piiristä (ns. *epäsymmetrinen kaupparatsuprobleema*).

Kaupparatsuprobleema¹ on \mathcal{NP} -täydellinen tehtävä, ks. esim. MEHLHORN. Itse asiassa jo Hamiltonin piirin olemassaolon selvittäminen on \mathcal{NP} -täydellinen. Pienehkönkin kaupparatsuprobleeman tarkka ratkaisu vie siis paljon aikaa ja suuret tehtävät vievät niin paljon aikaa, että niiden ratkaiseminen tarkasti on käytännössä mahdotonta. Näin ollen monet stokastis-approksimatiiviset menetelmät ovat nousseet käytännön menetelmiksi. Tällöin on tyydyttävä tilanteeseen, missä ratkaisua ei silloin tällöin löydy ollenkaan tai se ei ole tarkka.

Hekutusalgoritmi

Hekutusalgoritmeille ("annealing algorithm") eli *termodynaamisille algoritmeille* ovat ominaisia seuraavat yhteiset piirteet:

- (A) Tarkasteltava systeemi on aina jossain ns. *tilassa* s . Kaikkien tilojen joukko on äärellinen tunnettu joukko S . Kaupparatsuprobleemassa tila on Hamiltonin piiri.
- (B) Kutakin tilaa s vastaa tietty ns. *vaste* $f(s)$, joka on voitava laskea suhteellisen nopeasti käytetystä tilan esityksestä. Tavoitteena on etsiä tila, jossa vaste olisi lähellä minimiään/maksimiaan. Kaupparatsuprobleemassa vaste on Hamiltonin piirin paino ja se on tarkoitus minimoida.
- (C) On menettely A_k , jota käyttäen voidaan siirtyä tilasta s tilaan $A_k(s)$. k on menettelyn parametri, jonka arvot muodostavat joukon K . K voi muuttua algoritmin suorituksen aikana. Tarkoitus on, että siirrytään tällä tavoin tiettyihin tilaa s "lähellä oleviin" tiloihin, jotka määräytyvät kulloisenkin parametrin k valinnoin. Toistamalla menettelyä sopivin k :n arvoin on voitava siirtyä mistä tahansa tilasta mihin tahansa toiseen tilaan. (Tästä voidaan joissain tapauksissa tinkiä.)
- (D) Kussakin tilansiirtotilanteessa parametri k on voitava valita nopeasti satunnaisesti joukosta K . Erityisesti joukon K itse on oltava helposti laskettavissa.
- (E) Menettelyn A_k on annetulla k :n arvolla oltava nopeasti suoritettavissa.
- (F) Tietty lähtötila s_0 on voitava löytää. Kaupparatsuprobleeman yhteydessä lähtötila on jokin Hamiltonin piiri.

Itse algoritmi on seuraava:

Hekutusalgoritmi:

1. Valitaan lähtötila s_0 sekä *alkulämpötila* T_0 ja asetetaan $s \leftarrow s_0$ sekä $T \leftarrow T_0$.
2. Kun ollaan tilassa s , valitaan satunnaisesti parametri $k \in K$ ja lasketaan $s' = A_k(s)$.
3. Jos $f(s') \leq f(s)$, asetetaan $s \leftarrow s'$ ja mennään kohtaan 5.
4. Jos taas $f(s') > f(s)$, generoidaan satunnaisluku r väliltä $[0, 1)$. Mikäli $r \leq e^{(f(s)-f(s'))/T}$, asetetaan $s \leftarrow s'$. "Huonempi" vaste siis hyväksytään mainitulla todennäköisyydellä $e^{(f(s)-f(s'))/T}$. Huomaa, että mitä suurempi lämpötila T on, sitä suuremmalla todennäköisyydellä mennään tällä tavoin "ylämäkeen".

¹Nimi ("travelling salesman problem", TSP) tulee tulkinnasta, jossa graafin pisteet ovat kaupunkeja ja viivojen painot kaupunkien väliset matkustusajat ja kaupparatsun on kuljettava minimiajassa läpi kaikkien kaupunkien.

5. Jos kaikkiaan on jo tehty kyllin monta iteraatiota, tulostetaan s ja lopetetaan. Ellei näin ole ja käytetyssä lämpötilassa on jo tehty kyllin monta iteraatiota, pienennetään lämpötilaa T jonkin säännön mukaan. Mennään kohtaan 2.

Huomautus. Kohdassa 4. esiintyvien todennäköisyyksien $p_{s'} = e^{\frac{f(s)-f(s')}{T}}$ jakauma on (normeerausta vaille) ns. maksimientropiajakauma jollain (odotusarvo)ehdolla

$$\sum_{\substack{s'=A_k(s) \\ k \in K \\ f(s') > f(s)}} p_{s'} f(s') = \mu,$$

missä μ riippuu lämpötilasta T ja tilasta s . Jakauma on ns. Boltzmannin jakauma ja se on analoginen vastaavan statistisen mekaniikan jakauman kanssa. Ks. kurssi Informaatioteoria.

Aluksi odotetaan kunnes tilanvaihtelut ovat asettuneet tiettyyn tasapainotilanteeseen ($f(s)$:n avulla mitaten). Sen jälkeen pienennetään T :n arvoa hiukan ja odotetaan taas tasapainotilaan muodostumista, pienennetään taas T :n arvoa jne. Tätä jatketaan kunnes muutokset $f(s)$:n arvoissa ovat kyllin pieniä tai kunnes ”aika loppuu”.

Tilansiirto-operaatio A_k sekä ”naapuritilojen” joukot K riippuvat tietysti tehtävästä, samoin tilastruktuuri sekä vastefunktio. Kaupparatsuprobleemaa ajatellen pitää siis vielä antaa A_k ja K kussakin tilanteessa. Tätä varten otetaan käyttöön vielä yksi parametri j , asetetaan aluksi $j \leftarrow 2$ ja aina kohtaan 2. tultaessa päivitetään j asetuksella

$$j \leftarrow \begin{cases} j + 1, \text{ jos } j < n \\ 2 \text{ muuten.} \end{cases}$$

(Toinen tapa olisi valita j aina kohtaan 2. tultaessa satunnaisesti joukosta $\{2, \dots, n\}$.) Edelleen valitaan kulloinkin

$$K = \{2, \dots, n\} - \{j\}.$$

A_k on seuraava menettely (ns. *reversio*):

- Jos $k > j$, vaihdetaan Hamiltonin piirissä

$$s : v_1, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_1$$

osapolun v_{i_j}, \dots, v_{i_k} pisteiden järjestys päinvastaiseksi.

- Jos $k < j$, vaihdetaan Hamiltonin piirissä

$$s : v_1, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_1$$

osapolun v_{i_k}, \dots, v_{i_j} pisteiden järjestys päinvastaiseksi.

Jotta ei tarvitse huolehtia Hamiltonin piirien olemassaolosta, lisätään graafiin siitä puuttuvat viivat hyvin suuripainoisina. (Graafi on siis sen jälkeen täydellinen.) Jollei Hamiltonin piiriä lopultakaan saada aikaan ilman näitä lisättyjä viivoja, ei alkuperäisestä graafista löydy lainkaan Hamiltonin piiriä.

Alkulämpötilan T_0 pitäisi olla reippaasti suurempi kuin mikään arvoista $|f(s') - f(s)|$, mikä takaa, että alkuvaiheessa (”hehkutus”) voidaan periaatteessa siirtyä mihin tahansa tilaan. Sen jälkeen lämpötilaa lasketaan jollakin säännöllä, esimerkiksi 10%:lla/kerta.

Hehkutusalgoritmi sopii myös epäsymmetrisen kaupparatsuprobleeman ratkaisuun ilmeisin muutoksin.

Karp–Held-heuristiikka

Karp–Held-heuristiikassa ei pyritäkään etsimään suoraan Hamiltonin piiriä, vaan ”sen tapais-ta” aligraafia, ns. *virittävää 1-puuta*². Se ei näin ollen sellaisenaan käy epäsymmetrisen kaup-paratsuprobleeman käsittelyyn. Pisteeseen v (ns. *viitepiste*) liittyvä virittävä 1-puu S_v on G :n aligraafi, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- (a) S_v on yhtenäinen ja sisältää kaikki G :n pisteet.
- (b) S_v :ssä on tarkalleen yksi piiri C ja piste v on C :ssä.
- (c) S_v :ssä on tarkalleen kaksi viivaa, joiden päätepiste on v .

Selvästi Hamiltonin piiri on (mihin tahansa pisteeseen liittyvä) virittävä 1-puu. Virittävän 1-puun S_v *paino* $\gamma(S_v)$ on sen viivojen painojen summa. S_v on *minimaalinen*, kun sen paino on pienin mahdollinen.

Väite. S_v on *minimaalinen tarkalleen silloin, kun*

- (i) $S_v - v$ on $G - v$:n *minimaalinen virittävä puu ja*
- (ii) *ne kaksi S_v :n viivaa, joiden päätepiste on v , ovat painoiltaan kaksi kevyintä tällaista G :n viivaa.*

Todistus. Oletetaan, että S_v on *minimaalinen virittävä 1-puu*. Otetaan ne kaksi S_v :n viivaa e ja e' , joiden päätepiste on v . Tällöin $S_v - v$ on $G - v$:n virittävä puu, sillä v :n poisto hävittää ainoan piirin, mutta yhtenäisyys säilyy. Jos nyt $S_v - v$ ei ole $G - v$:n *minimaalinen virittävä puu*, niin on kevyempi $G - v$:n virittävä puu T . Lisäämällä T :hen piste v sekä viivat e ja e' saadaan pisteeseen v liittyvä virittävä 1-puu, joka on kevyempi kuin S_v (\checkmark). Näin ollen (i) on voimassa. Ilmeisesti myös (ii) on voimassa (muutoinhan saataisiin kevyempi virittävä 1-puu vaihtamalla e :n ja e' :n tilalle kaksi kevyintä G :n viivaa, joiden päätepiste on v).

Oletetaan sitten, että (i) ja (ii) ovat voimassa. Jos nyt S_v ei ole *minimaalinen*, on kevyempi pisteeseen v liittyvä *minimaalinen virittävä 1-puu* S'_v . Koska myös S'_v toteuttaa (ii):n, ovat ne kaksi viivaa, joiden päätepiste on v , samat (tai ainakin samanpainoiset) S_v :ssä ja S'_v :ssa. Näin ollen $S'_v - v$ on kevyempi kuin $S_v - v$ (\checkmark). \square

Väitteestä seuraa, että mikä tahansa algoritmi *minimaalisen virittävän puun* etsimiseksi käy pienin muutoksin myös *minimaalisen virittävän 1-puun* etsimiseksi. Erityisesti eo. Kruskalin ja Primin algoritmit sopivat tähän hyvin.

Karp–Held-heuristiikassa käytetään myös pisteiden painoja $\beta(v)$. Näiden avulla saadaan viivojen *valepainot*

$$\alpha'(v_i, v_j) = \alpha(v_i, v_j) + \beta(v_i) + \beta(v_j).$$

Valepainojen avulla saadaan edelleen virittävän 1-puun S_v *valepaino* (merkitään S_v :n viivojen joukkoa A :lla):

$$\begin{aligned} \gamma'(S_v) &= \sum_{(v_i, v_j) \in A} \alpha'(v_i, v_j) = \sum_{(v_i, v_j) \in A} \alpha(v_i, v_j) + \sum_{(v_i, v_j) \in A} (\beta(v_i) + \beta(v_j)) \\ &= \gamma(S_v) + \sum_{(v_i, v_j) \in A} (\beta(v_i) + \beta(v_j)). \end{aligned}$$

²Ei ole sama kuin aikaisemmin sivulla 22 oleva 1-puu!

Merkitään nyt pisteen u astetta S_v :ssä $d_{S_v}(u)$:lla. Silloin

$$\sum_{(v_i, v_j) \in A} (\beta(v_i) + \beta(v_j)) = \sum_{i=1}^n \beta(v_i) d_{S_v}(v_i)$$

ja

$$\gamma'(S_v) = \gamma(S_v) + \sum_{i=1}^n \beta(v_i) d_{S_v}(v_i).$$

Erytyisesti, jos kyseessä on Hamiltonin piiri H (eräs virittävä 1-puu), niin

$$d_H(v_1) = \dots = d_H(v_n) = 2$$

ja

$$\gamma'(H) = \gamma(H) + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \beta(v_i)}_{\text{Ei riipu } H\text{:sta!}}$$

Hamiltonin piirin minimointi valepainoja käyttäen antaa siis samat minimaaliset piirit kuin ”oikeitakin” painoja käyttäen! Yleisesti minimaalisen virittävän 1-puun etsiminen valepainoja käyttäen johtaa toisaalta eri tulokseen kuin oikeita painoja käyttäen.

Jatkossa tarkastellaan vain pisteeseen v_1 liittyviä virittäviä 1-puita ja jätetään pois pisteen ilmoittava alaindeksi. Hamiltonin piirejä ajatellen tämä ei ole mikään rajoitus, vaikkakin saattaa olla hyvä idea vaihdella viitepistettä. Oletetaan nyt, että H_{\min} on minimaalinen Hamiltonin piiri ja S' on valepainoja käyttäen saatu minimaalinen virittävä 1-puu (liittyen siis pisteeseen v_1). Silloin

$$\gamma'(H_{\min}) \geq \gamma'(S').$$

Edelleen

$$\gamma'(H_{\min}) = \gamma(H_{\min}) + 2 \sum_{i=1}^n \beta(v_i)$$

ja

$$\gamma'(S') = \gamma(S') + \sum_{i=1}^n \beta(v_i) d_{S'}(v_i).$$

Siis

$$\begin{aligned} \gamma(H_{\min}) &= \gamma'(H_{\min}) - 2 \sum_{i=1}^n \beta(v_i) \geq \gamma'(S') - 2 \sum_{i=1}^n \beta(v_i) \\ &= \gamma(S') + \sum_{i=1}^n \beta(v_i) (d_{S'}(v_i) - 2), \end{aligned}$$

josta saadaan alaraja $\gamma(H_{\min})$:lle.

Karp–Held-heuristiikassa ideana on pisteiden painoja muutellen ohjata pisteiden asteet S' :ssa arvoon 2. Jos tämä onnistuu, on samalla saatu minimaalinen Hamiltonin piiri. Joka tapauksessa saadaan yo. arviota käyttäen alaraja (mahdollisen) minimaalisen Hamiltonin piirin painolle $\gamma(H)$. (Huomaa, että $d_{S'}(v_1)$ on aina = 2, koska S' on pisteeseen v_1 liittyvä virittävä 1-puu.)

Karp–Held-heuristiikka:

1. Asetetaan $\beta(v) \leftarrow 0$ kaikille pisteille v .
2. Asetetaan $\alpha'(u, v) \leftarrow \alpha(u, v) + \beta(u) + \beta(v)$ kaikille viivoille (u, v) .
3. Etsitään minimaalinen virittävä 1-puu S' valepainoja $\alpha'(u, v)$ käyttäen. Jos tällaista ei löydy, ei myöskään Hamiltonin piiriä löydy ja voidaan lopettaa.
4. Jos S' on piiri, niin tulostetaan minimaalinen Hamiltonin piiri $H = S'$ ja lopetetaan.
5. Jos S' ei ole piiri ja S' :sta laskettu alaraja on kasvanut K iteraatiokierroksen aikana, niin asetetaan $\beta(v) \leftarrow \beta(v) + d_{S'}(v) - 2$ jokaiselle pisteelle v ja mennään kohtaan 2. (K on etukäteen kiinnitetty iteraatiokierrosten maksimimäärä.)
6. Jos S' :sta laskettu alaraja ei ole kasvanut K :n iteraatiokierroksen aikana, lopetetaan ja tulostetaan ko. alaraja.

Menettely ei loputtomiin jatkettunakaan aina tuota (minimaalista) Hamiltonin piiriä, vaikka tällainen olisikin olemassa. Käytännössä se kumminkin tuottaa usein joko minimaalisen Hamiltonin piirin tai antaa hyvän alarajan sellaisen painolle. Alarajan saaminen ei tietystikään takaa, että mitään Hamiltonin piirejä graafissa olisikaan!

Karp–Held-heuristiikassa on monia kohtia, joissa pitää valita useista vaihtoehdoista (viitepiste, käytetty 1-puu). Kaikkia mahdollisuuksia ei voida käydä läpi, joten valinta voidaan tehdä satunnaisesti. Tällöin kyseessä on Las Vegas -tyyppinen stokastinen algoritmi.

5.8 Kaksijakoisen graafin maksimisovitus: Unkarilainen algoritmi

Graafin $G = (V, E)$ *sovitus* on sellainen viivajoukko $S \subseteq E$, että mikään S :n viiva ei ole toisen S :n viivan vierusviiva. Sovitus on *maksimisovitus*, jos siinä on suurin mahdollinen määrä viivoja. Piste, joka on jonkin sovituksen viivan päätepiste, on *sovitettu*.

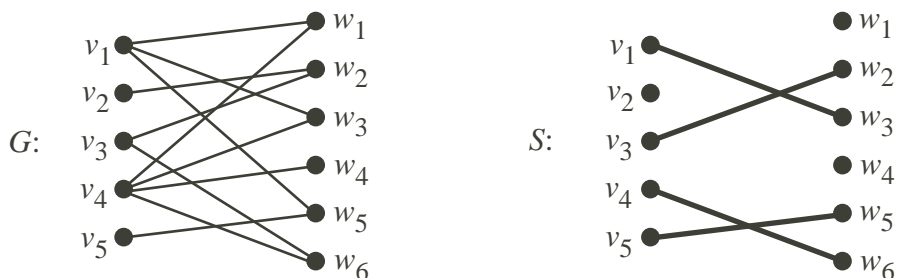
Tehtävä. Etsi kaksijakoiselle graafille maksimisovitus.

Sovituksen S *vuorotteleva polku* on sellainen polku, jonka

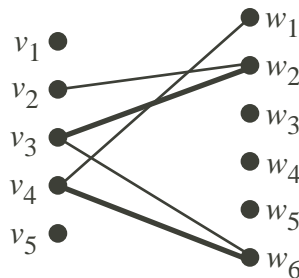
- (1) ensimmäinen piste on sovittamaton ja jonka
- (2) viivoista joka toinen on sovituksessa ja joka toinen ei.

Huomaa, että vuorottelevan polun ensimmäinen viiva ei ole sovituksessa. Jos vuorottelevan polun viimeinen piste on myös sovittamaton, on kyseessä sovituksen S *lisäyspolku*. Sovitus, jolla ei ole lisäyspolkuja, on ns. *maksimaalinen sovitus*.

Esimerkki. Kaksijakoisen graafin



sovituksen $S = \{(v_1, w_3), (v_3, w_2), (v_4, w_6), (v_5, w_5)\}$ eräs lisäyspolku on polku, jonka pisteet ovat järjestyksessä $v_2, w_2, v_3, w_6, v_4, w_1$.

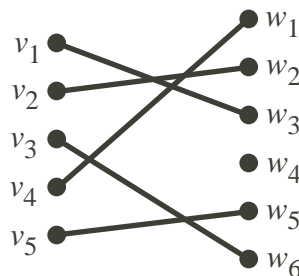


Sovituksen S lisäyspolun p avulla voidaan sovituksista lisätä seuraavasti:

1. poistetaan sovitukselta S sen polulla p olevat viivat ja
2. lisätään sovitukseseen ne polun p viivat, jotka eivät olleet sovituksessa.

Saatu uusi viivajoukko on ilmeisesti jälleen sovitus. Huomaa, että S :n viivoja on lisäyspolulla yhtä vähemmän kuin muita viivoja. Näin lisäyksessä sovituksen viivojen lukumäärä kasvaa yhdellä. Maksimaalista sovituksista ei tällä tavoin voida enää lisätä.

Esimerkki. (Jatkoa) Käyttäen annettua lisäyspolkua sovitukselta S saadaan uusi sovitus $S_1 = \{(v_1, w_3), (v_2, w_2), (v_3, w_6), (v_4, w_1), (v_5, w_5)\}$, joka on maksimaalinen.

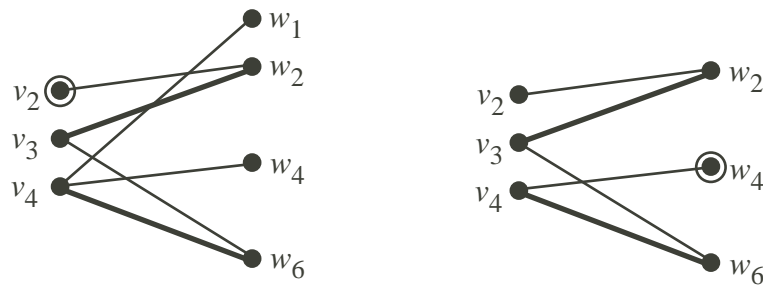


Unkarilaisessa algoritmossa etsitään systemaattisesti lisäyspolkua, kunnes saadaan maksimaalinen sovitus. Sen jälkeen riittääkin todistaa, että maksimaalinen sovitus on maksimisovitus. Jatkossa rajoitutaan kaksijakoisiin graafeihin, joille algoritmi on huomattavasti helpompi. Lisäyspolkua etsitään konstruomalla sovituksen S vuorotteleva puu. Se on G :n alipuu, jonka

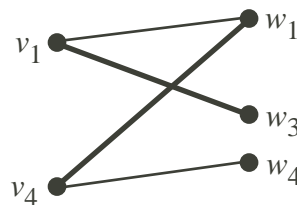
- (1) eräs piste r (puun juuri) on sovittamaton, jonka
- (2) r :stä lähtevien polkujen viivoista joka toinen on S :ssä ja joka toinen ei ja jossa
- (3) joko on r :stä lähtävä lisäyspolku tai johon ei voida enää lisätä viivoja.

Vuorotteleva puu on lisäyspuu, jos siinä on lisäyspolku, muutoin se on ns. unkarilainen puu. Jokainen lisäyspolku on ilmeisesti itsessään lisäyspuu. Huomaa, että ainoa unkarilaisen puun piste, joka ei ole sovitettu, on sen juuri.

Esimerkki. (Jatkoa) Mainitun sovituksen S vuorottelevia puita ovat seuraavat (juuri on ympyröity):



Molemmat ovat lisäyspuita. Sen sijaan sovituksen S_1 vuorotteleva puu (juurena w_4) on puu



joka on unkarilainen.

Lisäyspuu tai unkarilainen puu ei ole yksikäsitteinen. Riippuen siitä missä järjestyksessä puuta juuresta lähtien konstruotaessa viivoja otetaan mukaan, voidaan saada lukuisia erilaisia puita, vaikka juuri olisikin sama. Toisaalta pätee

Väite. Jos kaksijakoisen graafin G sovituksella on unkarilainen puu, niin sillä ei ole samanjuurista lisäyspuita.

Todistus. Asetetaan vastaoletus: Sovituksella S on unkarilainen puu U sekä samaan juureen r liittyvä lisäyspuu T . Lisäyspuusta saadaan lisäyspolku

$$p : r = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k.$$

Valitaan polulta p viimeinen piste, sanotaan v_i , joka on U :ssa (ainakin $r = v_0$ on U :ssa). Koska v_k ei ole U :ssa, on $i < k$. Edelleen viiva e_{i+1} ei ole sovituksessa eikä U :ssa (muuten myös v_{i+1} olisi U :ssa). Toisaalta, koska e_{i+1} ei ole U :ssa, on v_{i+1} :n esiinnyttävä U :ssa jonkin muun viivan päätepisteenä (\surd), sillä ainoa syy, miksi viiva e_{i+1} ei tule mukaan U :hun sitä konstruotaessa, on että sen toinen päätepiste v_{i+1} esiintyy jo konstruoidussa U :n osassa. Huomaa, miten kaksijakaisuus tulee tässä mukaan: Jos G :n kaksijakaisuuden antava irrotus on $\langle V_1, V_2 \rangle$, niin sekä U :ssa että p :ssä pisteet ovat vuorotellen V_1 :ssä ja V_2 :ssa. Näin ollen $r-v_i$ -polun pituus on sekä p :ssä että U :ssa parillinen. \square

Vuorottelevan puun konstruointi tietystä juuresta lähtien johtaa joko aina unkarilaiseen puuhun tai aina lisäyspuuhun, mutta ei molempiin. Näin ollen konstruointijärjestyksellä ei ole väliä. (Toisin muuten käy yleisen graafin tapauksessa!)

Kaksijakoiselle graafille $G = (V, E)$ unkarilainen algoritmi on seuraavanlainen. Kaksijakaisuuden antava irrotus on $\langle V_1, V_2 \rangle$.

Unkarilainen algoritmi:

1. Asetetaan $S \leftarrow \emptyset$. (Muutakin alkusovitusta voi käyttää.)

2. Jos kaikki V_1 :n pisteet tai kaikki V_2 :n pisteet on sovitettu sovituksessa S , niin S on maksimisovitus ja lopetetaan.
3. Jos V_1 :ssä on sovittamattomia pisteitä sovituksessa S , niin käydään niitä läpi jossain järjestyksessä muodostaen vastaavia vuorottelevia puita (puiden konstruktiovalla ei ole väliä, kuten todettiin). Jos löytyy lisäyspuu, lisätään sovitusta S puusta löytyvää lisäyspolkua käyttäen, jolloin saadaan uusi sovitus S_1 . Asetetaan $S \leftarrow S_1$ ja mennään kohtaan 2.
4. Jos taas kaikki V_1 :n sovittamattomat pisteet juurina saadut vuorottelevat puut ovat unkarilaisia, niin S on maksimaalinen sovitus ja lopetetaan.

Lause 5.3. *Kaksijakoisen graafin maksimaalinen sovitus on maksimisovitus.*

Todistus. Asetetaan vastaoletus: Kaksijakoisen graafin $G = (V, E)$ maksimaalinen sovitus S ei ole maksimisovitus. Silloin G :n maksimisovituksessa S_{\max} on enemmän viivoja kuin S :ssä ja V_1 :ssä on enemmän S_{\max} -sovitettuja pisteitä kuin S -sovitettuja pisteitä. Valitaan tarkasteltavaksi mielivaltainen piste $v \in V_1$, joka on S_{\max} -sovitettu mutta ei S -sovitettu. Silloin on polku

$$p : v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k = w,$$

jonka viivat ovat vuorotellen S_{\max} :ssa ja S :ssä: e_1 on S_{\max} :ssa, e_2 on S :ssä jne. Valitaan pisin tällainen polku p . Koska p on ilmeisesti vuorotteleva polku sovituksen S suhteen, sen pituus on parillinen, ts. e_k on S :n viiva. (Muussa tapauksessahan p olisi S :n lisäyspolku, jollaisia ei maksimaalisuuden takia ole.) Näin ollen w on S -sovitettu, mutta ei S_{\max} -sovitettu (sillä polkua p ei voi jatkaa).

Näin jokaista sellaista pistettä $v \in V_1$, joka on S_{\max} -sovitettu mutta ei S -sovitettu, vastaa piste $w \in V_1$, joka on S -sovitettu mutta ei S_{\max} -sovitettu. Nyt mistään muusta S_{\max} -sovitetusta mutta ei S -sovitetusta pisteestä kuin pisteestä v lähtevä polku ei voi päättyä w :hen. Tällaisen polun viimeisen viivan on nimittäin oltava e_k (ainoa S :n viiva, jonka päätepiste on w) ja toiseksi viimeisen pisteen siis v_{k-1} . Edelleen polun toiseksi viimeisen viivan on oltava e_{k-1} (ainoa S_{\max} :n viiva, jonka päätepiste on v_{k-1}) ja kolmanneksi viimeisen pisteen siis v_{k-2} . Jne.

Mutta silloin sellaisia pisteitä w , jotka ovat S -sovitettuja mutta eivät S_{\max} -sovitettuja, on V_1 :ssä ainakin yhtä monta kuin sellaisia pisteitä v , jotka ovat S_{\max} -sovitettuja mutta eivät S -sovitettuja (\checkmark). \square

Seuraus. *Unkarilainen algoritmi tuottaa kaksijakoisen graafin maksimisovituksen.*

Sovitus on *täydellinen*, jos se sovittaa kaikki graafin pisteet. Graafilla, jolla on pariton määrä pisteitä, ei näin ollen voi olla täydellistä sovitusta. Tarkastellaan graafia $G = (V, E)$ ja merkitään $\nu(v) = \{v$:n vieruspisteet} sekä pistejoukolle $A \subseteq V$ vielä $\nu(A) = \bigcup_{v \in A} \nu(v)$. Merkitään edelleen äärellisen joukon X alkioden lukumäärää (eli X :n kardinaliteettia) $\#(X)$:llä. Näillä merkinnöillä voidaan esittää seuraava kuuluisa karakterisaatio niille kaksijakoisille graafeille, joilla on täydellinen sovitus:

Lause 5.4. (Hallin lause, ”Marriage Theorem”) *Kaksijakoisella graafilla G , jonka kaksijakoisuuden antaa irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$, on täydellinen sovitus tarkalleen silloin, kun kaikille pistejoukoille $A \subseteq V_1$ ja $B \subseteq V_2$ pätee $\#(A) \leq \#(\nu(A))$ ja $\#(B) \leq \#(\nu(B))$.*

Todistus. Jos täydellinen sovitus on olemassa, niin ilmeisestikin pitää olla $\#(A) \leq \#(\nu(A))$ ja $\#(B) \leq \#(\nu(B))$ kaikille pistejoukoille $A \subseteq V_1$ ja $B \subseteq V_2$. (Muuten kaikille A :n tai B :n pisteille ei löydy sovituksessa paria.)

Oletetaan sitten, että kaikille pistejoukoille $A \subseteq V_1$ ja $B \subseteq V_2$ on $\#(A) \leq \#(\nu(A))$ ja $\#(B) \leq \#(\nu(B))$ ja tarkastellaan G :n maksimisovitusta S . Asetetaan vasta oletus: S ei ole täydellinen. Valitaan piste v , joka ei ole sovitettu sovituksessa S . Katsotaan tapaus, missä $v \in V_1$ (toinen tapaus $v \in V_2$ on tietysti aivan symmetrinen). Ristiriita on selvä, jos v on irtopiste, josta voidaan siirtyä tapaukseen, jossa v on jonkin viivan päätepiste. v -juurinen vuorotteleva puu on näin ollen ei-triviaali ja, koska maksimisovitus on myös maksimaalinen, kyseessä on unkarilainen puu. Valitaan jokin tällainen unkarilainen puu U . Merkitään U :ssa esiintyvien V_1 :n (vast. V_2 :n) pisteiden joukkoa A :lla (vast. B :llä). U :n konstruktioista johtuen $B = \nu(A)$. Toisaalta juurta v lukuunottamatta U :ssa esiintyvät A :n ja B :n pisteet on pareittain sovitettu S :n viivoilla, joten $\#(A) = \#(B) + 1 > \#(B)$ (\checkmark). \square

5.9 Siirtoverkon maksimivirtaus: Ford–Fulkerson-algoritmi

Siirtoverkko on sellainen nuolipainotettu suunnattu graafi $G = (V, E)$, että

- (1) G :ssä ei ole silmukoita ja se on yhtenäinen,
- (2) G :ssä on vain yksi lähde s ,
- (3) G :ssä on vain yksi nielu t ja
- (4) kunkin nuolen e paino $c(e)$, ns. nuolen e *kapasiteetti*, on ei-negatiivinen reaaliluku, ts. nuolipainotus on $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0$.

(Vrt. pykälän 4.4 stationääriset lineaariset verkot.) Itse asiassa voitaisiin myös olettaa G :ssä olevan kaikki mahdolliset nuolet silmukoita lukuunottamatta, mahdollisesti useammankertaisina. Jollei näin alunperin ole, niin lisätään ”puuttuvat” nuolet varustettuna kapasiteetilla 0. Luonnollisesti voidaan vielä olettaa, että G on ei-triviaali.

Siirtoverkon *virtaus* on sellainen nuolipainotus $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0$, että

- (i) jokaiselle nuolelle e pätee ns. *kapasiteettiehto* $f(e) \leq c(e)$ ja
- (ii) jokaiselle pisteelle $v \neq s, t$ pätee ns. *säilymisehto* (eli *Kirchhoffin virtauslaki*, vrt. pykälä 4.4)

$$\sum_{\substack{e:\text{n alkupiste on } v}} f(e) = \sum_{\substack{e:\text{n loppupiste on } v}} f(e).$$

$f(e)$ on ns. nuolen e *virta*. Nuolen (u, v) virtaa merkitään myös $f(u, v)$:llä. Virtauksen f *arvo* on

$$|f| = \sum_{\substack{e:\text{n alkupiste on } s}} f(e).$$

Virtauksen f^* sanotaan olevan *maksimivirtaus*, jos se on arvoltaan suurin, ts. $|f^*| \geq |f|$ kaikille mahdollisille virtauksille f .

Siirtoverkon G ns. *s–t-irrotus* on sellainen (suunnattu) irrotus $I = \langle V_1, V_2 \rangle$, että s on V_1 :ssä ja t on V_2 :ssa. Tällaisen irrotuksen *kapasiteetti* on

$$c(I) = \sum_{\substack{u \in V_1 \\ v \in V_2}} c(u, v)$$

(Huomaa miten irrotuksen suunnan vastaiset nuolet eivät vaikuta kapasiteettiin.) Irrotuksen $\langle V_1, V_2 \rangle$ kapasiteettia merkitään myös $c(V_1, V_2)$:lla. Edelleen määritellään irrotuksen $I = \langle V_1, V_2 \rangle$ vuoto

$$f^+(I) = \sum_{\substack{u \in V_1 \\ v \in V_2}} f(u, v)$$

ja vastavuo

$$f^-(I) = \sum_{\substack{u \in V_2 \\ v \in V_1}} f(u, v).$$

Virtauksen arvo saadaan nyt minkä tahansa s - t -irrotuksen voidaan avulla:

Lause 5.5. Jos f on siirtoverkon virtaus ja I sen s - t -irrotus, niin

$$|f| = f^+(I) - f^-(I).$$

Todistus. Ilmeisesti

$$\sum_{\substack{e:n \text{ alkupiste on } v}} f(e) - \sum_{\substack{e:n \text{ loppupiste on } v}} f(e) = \begin{cases} |f|, & \text{jos } v = s \\ 0, & \text{jos } v \neq s, t. \end{cases}$$

Merkitään $I = \langle V_1, V_2 \rangle$. Käymällä läpi kaikki V_1 :n pisteet v ja laskemalla puolittain yhteen saadut yhtälöt saadaan

$$\sum_{v \in V_1} \sum_{\substack{e:n \text{ alkupiste on } v}} f(e) - \sum_{v \in V_1} \sum_{\substack{e:n \text{ loppupiste on } v}} f(e) = |f|.$$

Kullekin nuolelle e , jonka molemmat päätepisteet ovat V_1 :ssä, esiintyvät $f(e)$ ja $-f(e)$ vasemalla puolella kumpikin tarkalleen kerran ja supistuvat näin pois. Siispä

$$\sum_{\substack{u \in V_1 \\ v \in V_2}} f(u, v) - \sum_{\substack{u \in V_2 \\ v \in V_1}} f(u, v) = |f|.$$

□

Seuraus. Jos f on siirtoverkon virtaus ja I sen s - t -irrotus, niin $|f| \leq c(I)$.

Todistus. $|f| = f^+(I) - f^-(I) \leq f^+(I) \leq c(I)$. □

Siirtoverkon nuolen e sanotaan olevan *kyllästetty*, jos $f(e) = c(e)$, muuten *ei-kyllästetty*. Nyt voidaan todeta, että $|f| = c(V_1, V_2)$ tarkalleen siinä tapauksessa, että

- (i) nuoli (u, v) on kyllästetty aina kun $u \in V_1$ ja $v \in V_2$, ja
- (ii) $f(u, v) = 0$ aina kun $u \in V_2$ ja $v \in V_1$.

Siirtoverkon s - t -irrotusta I^* sanotaan *minimi-irrotukseksi*, jos kaikille muille s - t -irrotuksille I on $c(I^*) \leq c(I)$.

Seuraus. Jos f on siirtoverkon virtaus ja I sen s - t -irrotus ja $|f| = c(I)$, niin f on *maksimivirtaus* ja I on *minimi-irrotus*.

Todistus. Jos f^* on *maksimivirtaus* ja I^* *minimi-irrotus*, niin edellisen Seurauksen nojalla $|f^*| \leq c(I^*)$. Niinpä tällöin

$$|f| \leq |f^*| \leq c(I^*) \leq c(I)$$

ja f on *maksimivirtaus* ja I *minimi-irrotus*. □

Itse asiassa maksimivirtauksen arvo on minimi-irrotuksen kapasiteetti. Tämän näyttämiseksi tarkastellaan yleisesti lähteestä s pisteeseen v kulkevia polkuja (ei välttämättä suunnattuja!)

$$s = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k = v \quad (\text{polku } p).$$

Jos $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, niin nuoli e_i on *etenevä*, jos taas $e_i = (v_i, v_{i-1})$, niin nuoli e_i on *takeneva*. Polun p nuoli e_i painotetaan nyt painolla

$$\epsilon(e_i) = \begin{cases} c(e_i) - f(e_i), & \text{jos } e_i \text{ on etenevä nuoli} \\ f(e_i), & \text{jos } e_i \text{ on takeneva nuoli} \end{cases}$$

ja itse polku p painolla

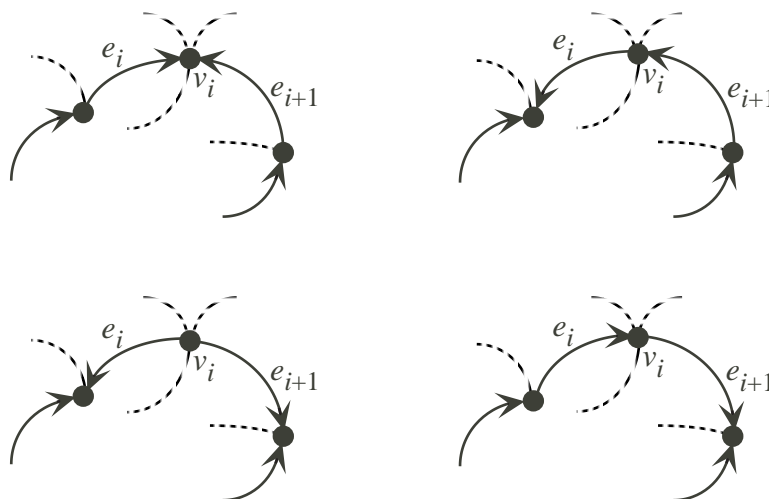
$$\epsilon(p) = \min_{i=1}^k \{\epsilon(e_i)\}.$$

Polkua p sanotaan *ei-kyllästetyksi*, jos $\epsilon(p) > 0$, ts. p :n etenevät nuolet ovat ei-kyllästettyjä ja $f(e_i) > 0$ p :n takeneville nuolille e_i .

Eryteisesti s - t -polut voivat olla ei-kyllästettyjä, jolloin niitä sanotaan *lisäyspoluiksi*³. Kaikki nämä käsitteet liittyvät tietysti aina tiettyyn virtaukseen f . Lähtien s - t -polusta p (ja virtauksesta f) voidaan määrittellä uusi virtaus

$$\bar{f} = \begin{cases} f(e) + \epsilon(p), & \text{jos } e \text{ on } p\text{:n etenevä nuoli} \\ f(e) - \epsilon(p), & \text{jos } e \text{ on } p\text{:n takeneva nuoli} \\ f(e) & \text{muuten.} \end{cases}$$

\bar{f} on todellakin virtaus. Muutokset virtaukseen f nähden tapahtuvat nimittäin vain polun p pisteissä ja nuolissa. Kapasiteettiehdon toteutuminen p :n nuolille seuraa suoraan $\epsilon(p)$:n ja $\bar{f}(e)$:n määritelmistä. Säilymisehdon toteutuminen p :n pisteille v_i on myös suoraan tarkistettavissa, erilaisia tilanteita on neljä:



Ilmeisesti (ajattele lähdettä s)

$$|\bar{f}| = |f| + \epsilon(p),$$

joten virtaus f ei ole maksimivirtaus, mikäli sillä on lisäyspolkuja. Mutta myös käänteinen tulos pätee, joten

³Ei pidä sekoittaa edellisen pykälän lisäyspolkuihin!

Lause 5.6. *Virtaus on maksimivirtaus tarkalleen siinä tapauksessa, että sillä ei ole lisäyspolkuja.*

Todistus. Kuten todettiin, maksimivirtauksella ei voi olla lisäyspolkuja. Oletetaan sitten, että virtauksella f ei ole lisäyspolkuja. Merkitään V_1 :llä niiden pisteiden joukkoa, joihin päästään lähteestä s pitkin ei-kyllästettyjä polkuja. Silloin triviaalisti $s \in V_1$ ja $t \notin V_1$ (koska lisäyspolkuja ei ole). Näin ollen irrotus $I = \langle V_1, V_2 \rangle$ on s - t -irrotus. Osoitetaan, että $|f| = c(I)$, josta edellisen Seurauksen nojalla seuraa, että f on maksimivirtaus.

Otetaan tarkasteltavaksi nuoli (u, v) , missä $u \in V_1$ ja $v \in V_2$. Silloin on olemassa ei-kyllästetty s - u -polku p . Nuoli (u, v) on kyllästetty, sillä muutoin olisi ei-kyllästetty s - v -polku. Samalla tavoin päätellään, että sellaiselle nuolelle (u, v) , missä $u \in V_2$ ja $v \in V_1$, on $f(u, v) = 0$. Niinpä vuo $f^+(I)$ on $c(I)$ ja vastavuo $f^-(I)$ on nolla. Lauseen 5.5 nojalla $|f| = c(I)$. \square

Samalla on tullut todistetuksi kuuluisa

Lause 5.7. (Max-Flow Min-Cut -lause) *Siirtoverkossa maksimivirtauksen arvo on sama kuin minimi-irrotuksen kapasiteetti.*

Jos nuolien kapasiteetit ovat rationaalilukuja, niin maksimivirtaus voidaan etsiä käyttäen Lauseita 5.6. Algoritmi pyrkii etsimään virtaukselle f lisäyspolkua. Ellei sellaista löydy, on kyseessä maksimivirtaus. Jos lisäyspolku löytyy, muodostetaan sitä käyttäen suurempi virtaus \bar{f} . Algoritmissa käytetään apuna pisteiden merkintää α . Merkintä on muotoa

$$\alpha(v) = (u, \text{suunta}, \Delta),$$

missä u on siirtoverkon piste (tai $-$, jos pistettä ei ole), ”suunta” on etenevä (\rightarrow) tai takeneva (\leftarrow) (tai $-$, jos suuntaa ei ole) ja Δ on ei-negatiivinen reaali-luku (tai ∞). Tarkoitus on, että kun piste v saa merkinnän, niin on olemassa s - v -polku p , jonka etenevä tai takeneva (”suunta”) nuoli (u, v) on, ja $\Delta = \epsilon(p)$. Pisteen v mahdollinen merkintä voidaan tehdä, kun piste u on merkitty ja joko (u, v) on nuoli tai (v, u) on nuoli. Saadaan kaksi vaihtoehtoa:

- (1) *(etenevä merkintä)* Jos $e = (u, v)$ on nuoli ja $\alpha(u) = (\cdot, \cdot, \Delta_u)$ ja $c(e) > f(e)$, niin voidaan merkitä $\alpha(v) = (u, \rightarrow, \Delta_v)$, missä

$$\Delta_v = \min\{\Delta_u, c(e) - f(e)\}.$$

- (2) *(takeneva merkintä)* Jos $e = (v, u)$ on nuoli ja $\alpha(u) = (\cdot, \cdot, \Delta_u)$ ja $f(e) > 0$, niin voidaan merkitä $\alpha(v) = (u, \leftarrow, \Delta_v)$, missä

$$\Delta_v = \min\{\Delta_u, f(e)\}.$$

Algoritmin suorituksessa on kaksi vaihetta. Ensimmäisen vaiheen aikana merkitään pisteitä yo. tavoin ja kukin piste tulee merkityksi enintään kerran. Vaihe loppuu, kun nielu t saa merkin $\alpha(t) = (\cdot, \rightarrow, \Delta_t)$ tai yhtäkään pistettä ei voida enää merkitä. Jälkimmäisessä tapauksessa lisäyspolkuja ei ole ja esillä oleva virtaus f on maksimivirtaus ja algoritmi pysähtyy. Edellisessä tapauksessa taas esillä oleva virtaus f ei ole maksimivirtaus ja on saatu lisäyspolku p , jolle $\epsilon(p) = \Delta_t$, ja algoritmi siirtyy toiseen vaiheeseen. Toisessa vaiheessa vain konstruoidaan ensimmäisessä vaiheessa saadun lisäyspolun pisteiden merkkejä käyttäen uusi suurempi virtaus \bar{f} , jonka jälkeen siirrytään ensimmäiseen vaiheeseen käyttäen tätä suurempaa virtausta.

Ford–Fulkerson-algoritmi:

1. Valitaan lähtövirtaus f_0 . Ellei parempaa virtausta ole käytettävissä, voidaan valita nolla-virtaus $f_0(e) = 0$. Merkitään sitten lähde s asettamalla $\alpha(s) \leftarrow (-, -, \infty)$. Asetetaan $f \leftarrow f_0$.
2. Jos on merkitsemätön piste v , joka voidaan merkitä joko etenevällä merkinnällä $(w, \rightarrow, \Delta_v)$ tai takenevalla merkinnällä $(w, \leftarrow, \Delta_v)$, niin valitaan yksi sellainen piste ja merkitään se. (Tapoja voi olla useita. Mikä tahansa niistä voidaan valita.) Ellei tällaista pistettä v ole, tulostetaan maksimivirtaus f ja lopetetaan.
3. Jos t ei ole merkitty, palataan kohtaan 2. Muutoin asetetaan $u \leftarrow t$.
4. Jos $\alpha(u) = (w, \rightarrow, \Delta_u)$, asetetaan

$$f(w, u) \leftarrow f(w, u) + \Delta_t \quad \text{ja} \quad u \leftarrow w.$$
 Jos taas $\alpha(u) = (w, \leftarrow, \Delta_u)$, asetetaan

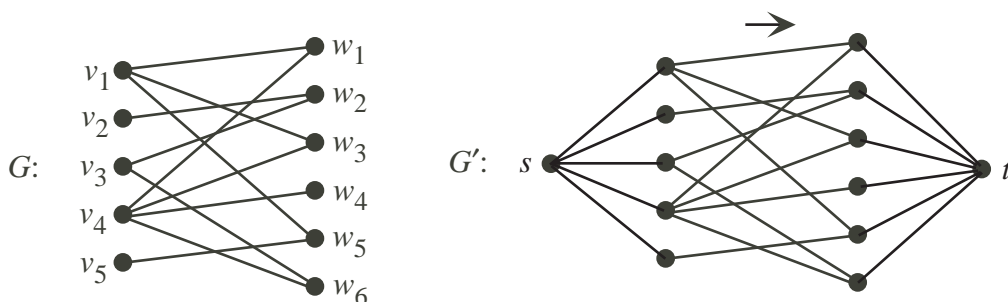
$$f(u, w) \leftarrow f(u, w) - \Delta_t \quad \text{ja} \quad u \leftarrow w.$$
5. Jos $u = s$, poistetaan kaikki merkinnät α lukuunottamatta lähteen s merkintää ja mennään kohtaan 2. Jos taas $u \neq s$, palataan kohtaan 4.

Mikäli alkuvirtauksen virrat $f_0(e)$ ovat rationaalilukuja ja kapasiteetit $c(e)$ ovat myös rationaalilukuja, niin algoritmi pysähtyy ja tuottaa maksimivirtauksen.⁴ Tällaisessa tapauksessa voidaan nimittäin yhtä hyvin olettaa, että ko. painot ja kapasiteetit ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, jolloin aina siirryttäessä toisesta vaiheesta uudelleen ensimmäiseen vaiheeseen virtauksen arvo kasvaa positiivisella kokonaisluvulla päätyen lopulta maksimivirtausarvoon. Toisaalta tällaisia askeleita voi silloin olla juuri maksimivirtauksen arvon osoittama määrä, eikä algoritmin suoritus aika riipukaan pelkästään verkon pisteiden määrästä (kuten voisi luulla), vaan kapasiteeteista.

Algoritmi voidaan modifioida⁵ siten, että sen suoritus aika ei riipu kapasiteeteista ja että se toimii myös irrationaalisille kapasiteeteille. Tällöin pyritään siihen, että kun ensimmäisen vaiheen aikana t merkitään, syntyy lyhin mahdollinen lisäyspolku. Tämä saadaan aikaan valitsemalla kohdassa 2. merkittävä piste v aina siten että $\alpha(v)$:ssä eli (w, \cdot, Δ_v) :ssä w on saanut merkkinsä mahdollisimman aikaisin.

Ford-Fulkerson-algoritmi käy myös maksimisovituksen etsimiseen kaksijakoisille graafeille. Katsotaan asiaa esimerkin valossa.

Esimerkki. Edellisessä pykälässä esimerkissä ollut kaksijakoinen graafi G ja sitä vastaava siirtoverkko G' :



⁴Jos virroissa $f_0(e)$ tai nuolien kapasiteeteissa on irrationaalilukuja, ei algoritmi välttämättä pysähdy lainkaan eikä toisaalta äärettömiin jatkettunakaan tuota välttämättä raja-arvona maksimivirtausta! Irrationaalisia virtoja $f_0(e)$ ei tietenkään tarvitse käyttää eikä toisaalta käytännössä irrationaalisia kapasiteettejakaan juuri esiinny.

⁵Ns. *Edmonds–Karp-modifikaatio* (ks. esimerkiksi SWAMY & THULASIRAMAN).

G' :n kaikki nuolet suunnataan vasemmalta oikealle ja painotetaan kapasiteetilla 1. Lähtövirtaus on nollavirtaus (tai sitten jostakin muusta alkusovituksesta saatava virtaus). Koko algoritmin suorituksen ajan nuolien virrat ovat kokonaislukuja 0 tai 1. Sovitukseen otetaan kulloinkin mukaan ne G :n viivat, joita vastaavat G' :n nuolet e saavat virran $f(e) = 1$, ja maksimivirtaus antaa maksimisovituksen. Huomaa, että lisäyspolku voi tässä olla pidempi kuin kolmen pituinen. (Voit myös todeta, että unkarilaisen algoritmin ja Ford–Fulkerson-algoritmin lisäyspoluilla on kuitenkin jotain yhteistä!)

Luku 6

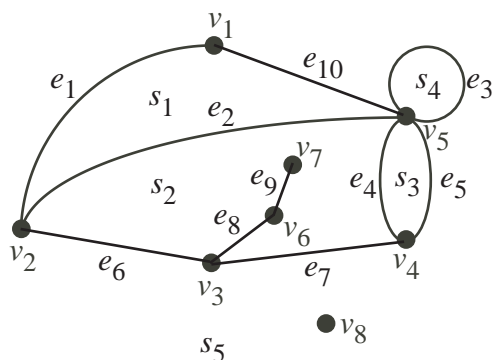
GRAAFIEN PIIRTÄMINEN

6.1 Tasottuvuus ja tasograafit

Edellä graafeja ei ole ajateltu geometrisina objekteina. Käytännössä graafeja kuitenkin *piirretään*, ts. pisteet ajatellaan geometrisina pisteinä ja viivat jatkuvina käyrien kaarina. Jos graafi G voidaan tällä tavoin piirtää tasolle (tai pallon pinnalle) niin, etteivät viivat leikkaa muualla kuin pisteissä, sanotaan G :n olevan *tasottuva* eli *planaari* graafi. Tasottuvan graafin tasolla olevaa geometrista esitystä, missä viivat eivät leikkaa, sanotaan *tasograafiksi*.

Tasograafin kierroksen rajaamaa yhtenäistä (avointa) tason osaa, jossa ei ole graafin pisteitä, kutsutaan tasograafin *silmäksi*. Myös tasograafin ulkopuolelle jäävän osan ajatellaan olevan silmä, ns. *ulkosilmä*. (Piirrettäessä pallon pinnalle se on silmä siinä kuin muutkin.) Silmää s vastaavan kierroksen pisteet ovat s :n ns. *reunapisteet* ja viivat s :n ns. *reunaviivat*. Kahden silmän sanotaan olevan *vierussilmät*, jos niillä on yhteinen reunaviiva. Huomaa, että silmä voi olla itsensä vierussilmä.

Esimerkki. *Tasograafissa*



silmät ovat s_1, s_2, s_3, s_4 ja s_5 (ulkosilmä) ja niiden reunapisteet ja -viivat sekä vierussilmät ovat alla olevassa taulussa.

<i>silmä</i>	<i>reunapisteet</i>	<i>reunaviivat</i>	<i>vierussilmät</i>
s_1	v_1, v_5, v_2	e_1, e_{10}, e_2	s_2, s_5
s_2	$v_2, v_5, v_4, v_3, v_6, v_7$	$e_2, e_4, e_7, e_9, e_8, e_6$	s_1, s_2, s_3, s_5
s_3	v_4, v_5	e_4, e_5	s_2, s_5
s_4	v_5	e_3	s_5
s_5	$v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_8$	$e_{10}, e_3, e_5, e_7, e_6, e_1$	s_1, s_2, s_3, s_4

Seuraavassa on eräitä tasograafien perusominaisuuksia.

Lause 6.1. (Eulerin monitahokaskaava¹) Jos yhtenäisessä tasograafissa G on n pistettä, m viivaa ja f silmää, niin

$$f + n = m + 2.$$

Todistus. Käytetään induktiota m :n suhteen.

Induktion lähtökohta: $m = 0$. Tasograafissa G on nyt vain yksi piste ja yksi silmä (ulkosilmä), joten lause on tällöin oikea.

Induktio-oletus: Lause on oikea, kun $m \leq \ell$. ($\ell \geq 0$)

Induktioväite: Lause on oikea, kun $m = \ell + 1$.

Induktioväitteen todistus: Valitaan jokin G :n viiva e ja tarkastellaan tasograafia $G' = G - e$. Jos e on piiriviiva, G' on yhtenäinen ja induktio-oletuksesta saadaan tulos

$$f' + n = (m - 1) + 2,$$

missä f' on G' :n silmien lukumäärä. Mutta piirin sulkeminen e :llä lisää silmien lukua yhdellä, joten tällöin $f' = f - 1$ ja lause on tosi. Jos taas $G - e$ on epäyhtenäinen, niin siinä on kaksi tasograafikomponenttia G_1 ja G_2 , joiden pisteiden, viivojen ja silmien luvut ovat n_1, n_2, m_1, m_2, f_1 ja f_2 , vastaavasti. Induktio-oletuksen nojalla

$$f_1 + n_1 = m_1 + 2 \quad \text{ja} \quad f_2 + n_2 = m_2 + 2.$$

Lisättäessä viiva e silmien luvuksi tulee $f_1 + f_2 - 1$ (G_1 :n ja G_2 :n ulkosilmä on yhteinen tai sitten jompikumpi on piirretty toisen silmään), pisteiden luvuksi $n_1 + n_2$ ja viivojen luvuksi $m_1 + m_2 + 1$, joten lause pitää taas paikkansa. \square

Esimerkki. (Jatkoa) Poistetaan piste v_8 , jotta saadaan yhtenäinen tasograafi. Pisteitä on nyt 7, viivoja 10, silmiä 5 ja $5 + 7 = 10 + 2$.

Lause 6.2. (Lineaarinen raja) Jos yksinkertaisessa yhtenäisessä tasograafissa G on $n \geq 3$ pistettä ja m viivaa, niin

$$m \leq 3n - 6.$$

Todistus. Jos G :n silmät ovat s_1, \dots, s_f , niin merkitään r_i :llä silmän s_i reunaviivojen lukumäärää ($i = 1, \dots, f$). Tapaus $f = 1$ on selvä, silloin G on puu ja $m = n - 1 \leq 3n - 6$, joten oletetaan, että $f \geq 2$. Koska G on yksinkertainen, on jokaisella silmällä nyt vähintään 3 reunaviivaa ja näin ollen

$$\sum_{i=1}^f r_i \geq 3f.$$

Jokainen viiva on yhden tai kahden silmän reunaviiva, joten

$$\sum_{i=1}^f r_i \leq 2m.$$

Tulos seuraa nyt Eulerin monitahokaskaavasta. \square

Lause 6.3. (Minimiasteraja) Yksinkertaisessa tasograafissa G on $\delta(G) \leq 5$.

Todistus. Tehdään vastaoletus: G on yksinkertainen tasograafi, G ja $\delta(G) \geq 6$. Silloin (Lause 1.1) $m \geq 3n$, missä n on G :n pisteluku ja m viivaluku (\surd , Lineaarinen raja). \square

¹Nimi tulee monitahokkaasta, jossa on n kärkeä, m särmää ja f tahkoa, eikä reikiä.

Karakterisaatio ei-tasottuville graafeille saadaan käyttäen tiettyjä kiellettyjä aligraafeja.

Lause 6.4. (Kuratowskin lause) *Graafi on tasottuva tarkalleen silloin, kun mikään sen aligraafeista ei ole toistuvien viivojen kutistuksella muutettavissa K_5 :ksi eikä $K_{3,3}$:ksi.*

Lauseen todistus on varsin hankala (mutta elegantti!), ks. esimerkiksi SWAMY & THULASIRAMAN. K_5 :ttä eikä $K_{3,3}$:a ei siis erityisesti voi piirtää tasograafiksi, minkä voi kyllä helposti todeta muutenkin.

Tasottuvuuden testaukseen ja tasottuvan graafin piirtämiseen tasograafiksi on nopeita, mutta hankalasti käsiteltäviä algoritmeja, esimerkiksi ns. *Hopcroft–Tarjan-algoritmi*². Esitetään seuraavassa klassinen hitaampi, mutta toki polynomiaikainen algoritmi, ns. *Demoucron–Malgrange–Pertuiset-algoritmi*³ (tunnetaan yleensä vain *Demoucronin algoritmina*). Algoritmin idea on yrittää piirtää graafia tasoon pala palalta. Ellei tämä onnistu, graafi ei ole tasottuva.

Jos G on graafi ja R on G :n tasottuvaa aligraafia S vastaava tasograafi, niin G :n R -pala P on

- joko $G - S$:n viiva, jonka päätepisteet ovat S :ssä, tai
- muiden kuin S :n pisteiden indusoiman aligraafin komponentti, jossa ovat mukana sen mahdolliset S :ään liittävät viivat, ns. *liitosviivat*, päätepisteineen.

G :n R -pala P pisteet, jotka ovat liitosviivojen S :n puoleisen pään pisteitä, ovat ns. P :n *kontaktipisteitä*.

G :n tasottuvaa aligraafia S vastaavan tasograafin R sanotaan olevan *tasolaajennettavissa G :ksi*, jos se voidaan piirtämällä jatkaa koko G :n tasoesitykseksi. Edelleen G :n R -pala P sanotaan olevan *piirrettävissä R :n silmään s* , jos on sellainen R :n tasolaajennus G :ksi, jossa P on piirretty silmään s . Ilmeisesti tällöin kaikkien P :n kontaktipisteiden pitää olla s :n reunapisteitä, mutta tämä ei tietenkään itsessään takaa vielä, että R olisi tasolaajennettavissa G :ksi. Sellaisen P :n, jonka kontaktipisteet ovat s :n reunapisteitä, sanotaankin olevan vain *potentiaalisesti piirrettävissä s :ään*. Pala, jolla ei ole kontaktipisteitä lainkaan, on potentiaalisesti piirrettävissä mihin tahansa R :n silmään.

Demoucronin algoritmi:

1. Testataan, onko G metsä. Jos se on, se on ilmeisesti tasottuva ja voidaan piirtää. (Tähän on varta vasten nopeita algoritmejakin.) Lopetetaan.
2. Ellei G ole metsä, niin siinä on piirejä. Valitaan jokin piiri C , piirretään se tasograafiksi D ja asetetaan $R \leftarrow D$. (Piiri on ilmeisesti tasottuva ja voidaan helposti piirtää tasograafiksi.)
3. Jos R on G :n tasoesitys, tulostetaan se ja lopetetaan.
4. Muodostetaan kaikkien R -palojen joukko \mathcal{P} . Kullekin palalle $P \in \mathcal{P}$ merkitään $\mathcal{S}(P)$:llä niiden R :n silmien joukkoa, joihin se P potentiaalisesti piirrettävissä.
5. Jos jollekin R -palalle $P \in \mathcal{P}$ joukko $\mathcal{S}(P)$ on tyhjä, niin G ei ole tasottuva. Tulostetaan silloin tämä tieto ja lopetetaan.

²Alkuperäisviite on HOPCROFT, J.E. & TARJAN, R.E.: Efficient Planarity Testing. *Journal of the ACM* **21** (1974), 549–568.

³Alkuperäisviite on DEMOUCRON, G. & MALGRANGE, Y. & PERTUISET, R.: Graphes planaires: reconnaissance et construction des représentations planaires topologiques. *Revue Française Recherche Opérationnelle* **8** (1964), 33–47.

6. Valitaan jokin R -pala P , aloittaen niistä, jotka ovat potentiaalisesti piirrettävissä vain yhteen silmään.
7. Riippuen P :n kontaktipisteiden luvusta, tasolaajennetaan R :ää:
 - 7.1 Jos P :llä ei ole kontaktipisteitä, kutsutaan Demoucronin algoritmia rekursiivisesti P :lle. Jos P ei ole tasottuva, ei sitä ole G :kään. Tulostetaan tämä tieto ja lopetetaan. Muussa tapauksessa tasolaajennetaan R tasograafiksi U piirtämällä P johonkin sen silmään, asetetaan $R \leftarrow U$ ja mennään kohtaan 3.
 - 7.2 Jos P :llä on yksi kontaktipiste v ja vastaava liitosviiva e , kutsutaan Demoucronin algoritmia rekursiivisesti P :lle. Jos P ei ole tasottuva, ei sitä ole G :kään. Tulostetaan tämä tieto ja lopetetaan. Muussa tapauksessa tasolaajennetaan R tasograafiksi U piirtämällä P johonkin sellaiseen R :n silmään, jonka reunapiste v on, asetetaan $R \leftarrow U$ ja mennään kohtaan 3. (Ko. R :n silmä on P :n tasoesityksen ulkosilmä.)
 - 7.3 Jos P :llä on (ainakin) kaksi kontaktipistettä v_1 ja v_2 , on niiden välillä P :ssä jokin polku p . Tasolaajennetaan R tasograafiksi U piirtämällä p johonkin sellaiseen R :n silmään, jonka reunapisteitä v_1 ja v_2 ovat ja johon P on potentiaalisesti piirrettävissä, asetetaan $R \leftarrow U$ ja mennään kohtaan 3.

Ilmeisesti, jos G ei ole tasottuva, Demoucronin algoritmi tulostaa tämän tiedon. Toisaalta algoritmi ei voi jumiutua piirtämättä tasottuvaa graafia, sillä

Väite. Jos G on tasottuva graafi, niin koko suorituksen ajan R on tasolaajennettavissa G :ksi.

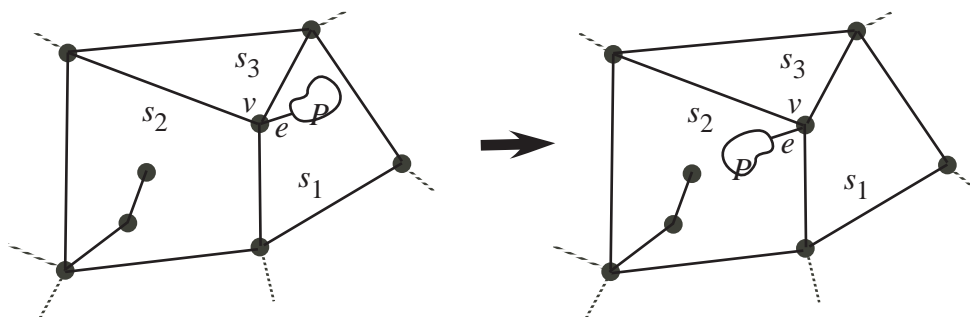
Todistus. Käytetään induktiota niiden kertojen lukumäärän ℓ suhteen, jotka algoritmi on kulkenut kohdan 7. kautta.

Induktion lähtökohta: $\ell = 0$. Tällöin joko G on metsä (eikä koko R :ää ole määritelty) tai R on G :n piiri. Ilmeisesti ko. piiri piirrettynä voidaan tasolaajentaa G :ksi.

Induktio-oletus: Väite on oikea, kun $\ell \leq r$. ($r \geq 0$)

Induktioväite: Väite on oikea, kun $\ell = r + 1$.

Induktioväitteen todistus: Kohdassa 7.1 asia on selvä. Jos kohdassa 7.2 P on potentiaalisesti piirrettävissä R :n silmään s , niin se voidaan aina piirtää tähän silmään vaarantamatta jatkoa (ts. mikä tahansa mahdollisista silmistä voidaan valita). Silmää nimittäin voidaan aina vaihtaa missä tahansa vaiheessa ”peilaamalla” pisteen v suhteen (ja skaalaamalla sopivasti):



Samoin, jos kohdassa 7.3 P on piirrettävissä johonkin R :n silmään, niin p voidaan aina piirtää tähän silmään vaarantamatta jatkoa. Jos nimittäin P on piirrettävissä sekä silmään s_1 että silmään s_2 , niin sen kontaktipisteet ovat näiden silmien yhteisellä reunalla. Missä tahansa vaiheessa voidaan piirretyt P :n osat vaihtaa silmästä s_1 silmään s_2 tai kääntäen yksinkertaisesti ”peilaamalla” tämän yhteisen reunan suhteen (ja skaalaamalla, jotta osat sopivat silmään). \square

Huomautus. Graafeja, jotka eivät ole tasottuvia, voidaan piirtää suljetuille pinnoille, joissa on reikiä. Esimerkiksi torus ("rinkiläpinta") on suljettu pinta, jossa on yksi reikä. Sille voidaan piirtää esimerkiksi K_5 , K_6 ja K_7 sekä $K_{3,3}$. K_8 vaatiikin sitten jo kaksireikäisen pinnan. Pienin määrä reikiä, joka suljetussa pinnassa pitää olla, jotta G voitaisiin piirtää sille viivojen leikkaamatta, on ns. G :n laji eli genus. Toisaalta pienin määrä viivojen leikkaamisia, joka pitää sallia, kun G piirretään tasolle, on ns. G :n ylitysluku. Lajin ja ylitysluvun laskut ovat \mathcal{NP} -täydellisiä tehtäviä.

Graafin väritys on sen pisteiden merkintä, jossa vieruspisteillä ei ole samaa merkkiä. Merkkejä kutsutaan tässä väreiksi. Graafin sanotaan olevan k -väritettävissä, jos se voidaan värittää enintään k värillä. Jos graafi on väritettävissä jollain värimäärällä, siinä ei ilmeisestikään saa olla silmukoita. Selvästi rinnakkaisia viivojakaan ei tarvita, joten väritettävyyttä ajatellen voidaan rajoittaa yksinkertaisiin graafeihin. Pienintä sellaista lukua k , että graafi G on k -väritettävissä, sanotaan G :n kromaattiseksi luvuksi, merkitään $\chi(G)$.

K_4 on esimerkki tasottuvasta graafista, jossa ei ole silmukoita ja joka ei ole 3-väritettävissä. Toisaalta pätee kuuluisa

Lause 6.5. (Neliväri-lause) Jokainen yksinkertainen tasottuva graafi on 4-väritettävissä.

Todistus. Ainoat tunnetut todistukset vaativat laajan tietokoneajon. Ensimmäisen sellaisen esittivät v. 1976 Kenneth Appel ja Wolfgang Haken. Todistuksen esittäminenkin vie kokonaisen kirjan: APPEL, K. & HAKEN, W.: *Every Planar Map is Four Colorable*. American Mathematical Society (1989). \square

Jos tyydytään vähän vähempään eli 5-väritettävyyteen, saadaan helposti todistettava lause ja myös algoritmi.

Lause 6.6. (Heawoodin lause eli Viisiväri-lause) Jokainen yksinkertainen tasottuva graafi G on 5-väritettävissä.

Todistus. G voidaan tässä ajatella tasograafiksi. Käytetään induktiota G :n pisteiden lukumäärän n suhteen.

Induktion lähtökohta: $n = 1$. Graafi on nyt 1-väritettävissä, koska viivoja ei ole.

Induktio-oletus: Lause on oikea, jos $n \leq \ell$. ($\ell \geq 1$)

Induktioväite: Lause on oikea, jos $n = \ell + 1$.

Induktioväitteen todistus: Minimiasterajan mukaisesti G :ssä on piste v , jonka aste on enintään 5. Induktio-oletuksen mukaisesti taas graafi $G - v$ on 5-väritettävissä. Jos tässä värityksessä v :n vieruspisteet on väritetty enintään neljällä värillä, niin ilmeisesti G :kin voidaan 5-värittää. Näin jäljelle jää tapaus, missä v :n vieruspisteet v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 on väritetty eri väreillä. Sovitaan, että nämä pisteet on indeksoitu myötäpäivään ja merkitään niiden värejä (järjestyksessä) numeroin 1, 2, 3, 4, 5. Näytetään, että $G - v$:n väritystä voidaan muuntaa siten, että v :n vieruspisteiden väritykseen tarvitaan vain enintään neljä väriä.

Merkitään $H_{i,j}$:llä $G - v$:n aligraafia, jonka indusoivat värein i ja j väritetyt pisteet. Saadaan kaksi tapausta:

- v_1 ja v_3 ovat $H_{1,3}$:n eri komponenteissa H_1 ja H_3 . Vaihdetaan H_3 :n pisteissä värit 1 ja 3 keskenään koskematta muihin pisteisiin. Tuloksena on $G - v$:n 5-väritys, jossa pisteillä v_1 ja v_3 on sama väri 1. v :lle voidaan nyt antaa väri 3.
- v_1 ja v_3 ovat yhdistetyt $H_{1,3}$:ssa. Silloin $H_{1,3}$:ssa on v_1-v_3 -polku. Ottamalla mukaan piste v saadaan tästä G :n piiri C . Koska pisteet v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 on indeksoitu myötäpäivään, on pisteistä v_2 ja v_4 toinen piirin C sisällä ja toinen sen ulkopuolella. Näin ollen v_2 ja v_4 ovat $H_{2,4}$:n eri komponenteissa ja tilanne palautuu edelliseen tapaukseen. \square

Todistuksesta saadaan (rekursiivinen) algoritmi 5-väritykselle, ns. *Heawoodin algoritmi*.

6.2 Davidson–Harel-algoritmi

Graafin piirtoa varten pitää määritellä piirtoalue (tässä ”ikkuna” eli suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset), viivojen piirtotapa (viivat piirretään tässä janoina) sekä tiettyjä ”kauneuskriteerejä”, jotka tekevät piirretystä esityksestä miellyttävän ja tasapainoisen sekä mahdollisimman selkeän. Tällaiset kriteerit ovat tietysti tarkoituksesta riippuvia ja jopa makuasioita. Piirrettävän graafin oletetaan olevan yksinkertainen ja se annetaan vaikkapa vieruspistematriisina tai täytenä insidenssimatriisina.

Seuraavassa esitetään ns. *Davidson–Harel-algoritmi*⁴, joka hehkutusmenetelmää käyttäen pyrkii parantamaan graafin piirrettyä esitystä minimoiden tiettyä *rumuusfunktiota*, ks. pykälä 5.7. Rumuusfunktio R antaa graafin G piirretystä esityksestä P saadun ns. *rumuusarvon* $R(P)$. Se on eri tekijöistä saatujen osien summa. Merkitään G :n pisteiden joukkoa $\{v_1, \dots, v_n\}$:llä sekä viivojen joukkoa $\{e_1, \dots, e_m\}$:llä. Edelleen merkitään tasoesityksessä P pistettä v_i vastaavaa vektoria \mathbf{v}_i :llä sekä viivaa e_j vastaavaa janaa e_j :llä. Merkitään edelleen

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|, \\ r_i &= \mathbf{v}_i\text{:n etäisyys ikkunan oikeasta reunasta,} \\ l_i &= \mathbf{v}_i\text{:n etäisyys ikkunan vasemmasta reunasta,} \\ u_i &= \mathbf{v}_i\text{:n etäisyys ikkunan yläreunasta,} \\ b_i &= \mathbf{v}_i\text{:n etäisyys ikkunan alareunasta,} \\ c_j &= \text{janan } e_j \text{ pituus,} \\ f_{ij} &= \begin{cases} 1, & \text{jos janat } e_i \text{ ja } e_j \text{ leikkaavat eivätkä } e_i \text{ ja } e_j \text{ ole vierusviivoja} \\ 0 & \text{muuten,} \end{cases} \\ g_{ij} &= \begin{cases} \text{pisteen } \mathbf{v}_i \text{ etäisyys janasta } e_j, & \text{jos se on } > g \text{ eikä } v_i \text{ ole } e_j\text{:n päätepiste} \\ g & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned}$$

g on menettelyn parametri, joka määrää miten lähelle viivat saavat tulla pisteitä. Rumuusfunktio on silloin

$$\begin{aligned} R(P) &= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{d_{ij}^2} + \lambda_2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_i^2} + \frac{1}{l_i^2} + \frac{1}{u_i^2} + \frac{1}{b_i^2} \right) + \lambda_3 \sum_{j=1}^m c_j^2 \\ &\quad + \lambda_4 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m f_{ij} + \lambda_5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_{ij}^2}, \end{aligned}$$

missä $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ ovat ei-negatiivisia parametrejä, joilla rumuuden eri osatekijöiden painoa säädetään. (Myös negatiivisia arvoja voisi ajatella, mutta vaikutus on varsin outo.)

Suuret d_{ij}, \dots, g_{ij} ovat varsin helposti laskettavissa peruskursseilta tutuilla vektorigeometrian menetelmillä. Erityistä huomiota on kuitenkin kiinnitettävä laskujen nopeuteen. Vektorien sijasta pisteitä voidaan merkitä kompleksiluvuilla. Myös tällöin mainitut suureet ovat helposti laskettavissa kompleksilukujen laskuoperaatioilla⁵. Toisinaan sovitetaan pisteet tiettyyn hiilaan. Tämä voidaan toteuttaa esimerkiksi pyöristämällä koordinaatit (tai kompleksiluvut) tiettyyn tarkkuuteen ja hylkäämällä sellaiset piirrokset (tilat), joissa rumuusfunktio saa äärettömän arvon (eli pisteet osuvat yhteen tms.).

⁴Alkuperäisviite on DAVIDSON, R. & HAREL, D.: Drawing Graphs Nicely Using Simulated Annealing. *ACM Transactions on Graphics* **15** (1996), 301–331.

⁵Huomaa, että jos $z_1 = x_1 + jy_1$ ja $z_2 = x_2 + jy_2$, missä j on imaginääriyksikkö, niin $\overline{z_1}z_2$:n reaaliosa on pistetulo $(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2)$ ja imaginääriosa determinantti $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

Hehkutuksessa tila on P ja vaste $R(P)$. Alkutila P_0 saadaan vaikkapa valitsemalla satunnaisesti pisteet $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ piirtoalueesta ja piirtämällä viivat vastaavasti. Tilasiirtomenettely $P \leftarrow A_\rho(P)$ on seuraava:

- Valitaan satunnaisesti jokin pisteistä \mathbf{v}_i . Vaihtoehtoisesti voidaan pisteitä käydä läpi syklistisesti järjestyksessä.
- Piirretään \mathbf{v}_i keskipisteenä ρ -säteinen ympyrä. Säde ρ on parametri, joka on aluksi iso ja jota pienennetään myöhemmin systemaattisesti.
- Valitaan ko. ympyrältä satunnaisesti jokin piste \mathbf{u} .
- Jos \mathbf{u} ei ole piirtoalueessa, tila ei vaihdu. Muutoin asetetaan $\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{u}$ ja tehdään piirrettyihin viivoihin vastaava muutos.

Muutoin menettely on hyvin samantapainen kuin pykälässä 5.7 oleva kaupparatsuprobleeman hehkutus algoritmi.

Huomautus. Menetelmällä on lukuisia variantteja, piirtoalue voisi olla vaikkapa ympyrä ja viivat samankeskeisiä ympyränkaaria ja säteitä, tai pallonpinta ja viivat isoympyrän kaaria. Piirtoalue voisi olla myös ääretön, esimerkiksi koko taso \mathbb{R}^2 . Graafeja voidaan myös ”piirtää” kolmiulotteiseen avaruuteen. Jne. Etäisyyksiä laskettaessa voisi taas käyttää muuta kuin tavallista Eukleideen normia (eli 2-normia), esimerkiksi korttelinormia (eli 1-normia eli Manhattan-metriikkaa) tai maksiminormia (eli ∞ -normia), pallon pinnalla geodeettista etäisyyttä jne. Tulokset näillä eri varianteilla ovat sangen erilaisia.

Huomattakoon, että melkeinpä millä tahansa vähänkään sitovilla kriteereillä yleisen (yksinkertaisen) graafin piirto optimaalisesti kauneimpaan muotoonsa on \mathcal{NP} -kova tehtävä.

Luku 7

MATROIDIT

Monet edellä olevat käsitteet eivät niinkään koske graafeja kuin niiden rakennetta. Tällaisia ovat mm. monet duaalisuudet (esimerkiksi irrotusjoukko vs. piiri), eräiden algoritmien toimintaperiaate (esimerkiksi Kruskalin algoritmit) ja ekstremaalisuudet (monet graafeihin liittyvät rakenteet ovat ”pienimpiä” lajissaan, esimerkiksi irrotusjoukosta ei voi ottaa pois yhtäkään viivaa).

Aivan vastaavia rakenteita on löytynyt monilla muilla matematiikan alueilla, ja niitä on alettu kutsua matroideiksi.¹

7.1 Perinnölliset järjestelmät

Perinnöllinen joukkoperhe on sellainen joukkoperhe \mathcal{F} , että jos joukko F kuuluu perheeseen, niin samoin kuuluu jokainen F :n osajoukko (ja erityisesti siis tyhjä joukko \emptyset). Joukon E *perinnöllinen järjestelmä* M on puolestaan E :n osajoukkojen ei-tyhjä perinnöllinen perhe \mathcal{I}_M . Lisäksi mukana on tapa, jolla \mathcal{I}_M :n joukkojen valinta kaikista E :n osajoukoista annetaan, tällaista kutsutaan *aspektiksi*. Jatkossa oletetaan, että E on äärellinen joukko. Asiaan liittyy koko joukko jo perinteisiksi tulleita nimityksiä:

- Perheen \mathcal{I}_M joukkoja kutsutaan M :n *riippumattomiksi joukoiksi*.
- Muiden kuin \mathcal{I}_M :ssä olevien E :n osajoukkojen perhettä merkitään \mathcal{D}_M :llä ja sitä kutsutaan M :n *riippuvien joukkojen perheeksi*.
- Riippumaton joukko on *maksimaalinen*, jos se ei sisälly aidosti mihinkään toiseen riippumattomaan joukkoon. Maksimaalista riippumatonta joukkoa kutsutaan *kannaksi*. Kaikkien kantojen perhettä merkitään \mathcal{B}_M :llä. Huomaa, että jokainen riippumaton joukko sisältyy johonkin kantaan.
- Riippuva joukko on *minimaalinen*, jos se ei sisällä aidosti mitään toista riippuvaa joukkoa. Minimaalista riippuvaa joukkoa kutsutaan *piiriksi*.² (Muista, että tyhjä joukko on aina mukana \mathcal{I}_M :ssä.) Kaikkien piirien perhettä merkitään \mathcal{C}_M :llä. Huomaa, että jokainen riippuva joukko sisältää jonkin piirin.

¹Merkillistä on, että suuri osa näistä löytyi toisistaan riippumatta vuoden 1935 paikkeilla: Hassler Whitney tutki graafien tasottuvuutta, Saunders MacLane geometrisia pistehiloja ja Bartel van der Waerden puolestaan riippumattomuutta vektoriarvaruoksissa.

²Tätä, tai muitakaan esiintyviä käsitteitä, ei pidä suoraan sekoittaa graafien vastaaviin, vaikka tietynlainen yhteys onkin!

- Piiri, jossa on vain yksi alkio, on ns. *silmukka*. Kaksialkioisen piirin alkioit ovat *rinnakkaiset*. Perinnöllinen järjestelmä on *yksinkertainen*, jos siinä ei ole silmukoita eikä rinnakkaisia alkioita.
- E :n osajoukon F *aste* eli *rangi* on alkioluvultaan suurimman sen sisältämän riippumattoman joukon koko. (Tässä siis oletetaan, että E on äärellinen joukko.) Huomaa, että ainakin tyhjä joukko on riippumaton joukko, joka sisältyy F :ään. Astetta merkitään $\rho_M(F)$:llä, ja ρ_M :ää sanotaan M :n *astefunktioksi* eli *rangifunktioksi*.

Jatkossa käytetään samantapaista merkintää kuin graafeille liittyen yhden alkion e lisäämiseen joukkoon F (merkitään $F + e$) tai poistamiseen joukosta F (merkitään $F - e$). Astefunktiolle saadaan pari helppoa ominaisuutta:

Lause 7.1. *Jos M on joukon E perinnöllinen järjestelmä, niin*

- (i) $\rho_M(\emptyset) = 0$ ja
- (ii) E :n osajoukolle F ja alkioille e on

$$\rho_M(F) \leq \rho_M(F + e) \leq \rho_M(F) + 1.$$

Todistus. Kohta (i) on ilmeinen, joten siirrytään kohtaan (ii).

Koska $F + e$ sisältää kaikki ne riippumattomat joukot mitkä F :kin, on $\rho_M(F + e) \geq \rho_M(F)$. Toisaalta mahdolliset $F + e$:n riippumattomat osajoukot, jotka eivät ole F :n osajoukkoja, muodostuvat jostakin F :n riippumattomasta osajoukosta ja e :stä, joten $\rho_M(F + e) \leq \rho_M(F) + 1$. \square

Perinnöllinen järjestelmä M voidaan luonnollisesti määritellä antamalla sen riippumattomat joukot, ts. antamalla \mathcal{I}_M . Mutta yhtä hyvin se voidaan määritellä antamalla kannat, ts. antamalla \mathcal{B}_M , sillä riippumattomat joukot ovat tarkalleen kaikki kantoihin sisältyvät joukot. Edelleen M voidaan määritellä antamalla piirit, ts. antamalla \mathcal{C}_M , sillä riippumattomat joukot ovat nyt tarkalleen ne joukot, jotka eivät sisällä piirejä. Ja vielä M voitaisiin määritellä antamalla astefunktio ρ_M , sillä joukko F on riippumaton tarkalleen silloin, kun $\rho_M(F) = \#(F)$. (Kuten edellä, tässä merkitään joukon F alkiolukua eli kardinaliteettia $\#(F)$:llä.) Näin ollen aspekti voi koskea mitä tahansa näistä suureista \mathcal{I}_M , \mathcal{B}_M , \mathcal{C}_M tai ρ_M .

Todettakoon, että perinnöllinen järjestelmä on aivan liian yleinen ollakseen kovin käyttökelpoinen käsite. Näin ollen sopivat aspektit ovat tarpeen, jotta saadaan käyttökelpoisempi käsite (matroidi). Tarkastellaan eräitä sopivia aspekteja ensin edeltä tutun matroidin avulla.

7.2 Graafin piirimatroidi

Graafin $G = (V, E)$ *piirimatroidi* $M(G)$ on sen viivojen joukon E perinnöllinen järjestelmä, jonka piirit ovat graafin piirit tulkittuina viivajoukoiksi. (Tässä luonnollisesti oletetaan, että G ei ole tyhjä.) $M(G)$:n kannat ovat sen maksimaaliset piirittömät viivajoukot, eli siis G :n virittävät metsät, ja $M(G)$:n riippumattomat joukot ovat G :n alimetsät tulkittuina viivajoukoiksi. Merkitään $G_F = (V, F)$ viivajoukolle $F \subseteq E$. Tavalliseen tapaan merkitään vielä G :n pistelukua n :llä.

Huomautus. *Perinnöllistä järjestelmää, joka ei suoranaisesti ole minkään graafin piirimatroidi, mutta on rakenteeltaan identtinen jonkin graafin piirimatroidin kanssa, kutsutaan graafiseksi matroidiksi.*

Katsotaan nyt erilaisia aspekteja piirimatroideille.

Kannanvaihto-ominaisuus

Otetaan nyt tarkasteltavaksi kaksi kantaa (eli siis G :n virittävää metsää) B_1 ja B_2 . Jos e on B_1 :n viiva, niin sen poistaminen graafista jakaa G :n jonkin komponentin G' kahtia. Nyt tietyt B_1 :n viivat muodostavat G' :n virittävän puun T_1 ja samoin B_2 :n tietyt viivat muodostavat G' :n virittävän puun T_2 . Poistettu viiva e on joko T_2 :n oksa tai sitten T_2^* :n side. Jälkimmäisessä tapauksessa se on jonkin T_2 :n oksan f määrittämässä perusirrotusjoukossa (vrt. Lause 2.7). Silloin $T_1 - e + f$ on myös G :n virittävä puu ja B_1 :ssä voidaan vaihtaa e viivaksi f ja edelleen saadaan G :n virittävä metsä eli kanta.

Näin ollen saadaan

Kannanvaihto-ominaisuus: Jos B_1 ja B_2 ovat eri kantoja ja $e \in B_1 - B_2$, niin on olemassa sellainen alkio $f \in B_2 - B_1$, että $B_1 - e + f$ on kanta.

Yleisesti, perinnöllinen järjestelmä, jolla on kannanvaihto-ominaisuus, on matroidi. Ts. kannanvaihto-ominaisuus on sopiva aspekti. Käyttäen kannanvaihto-ominaisuutta voidaan matroidissa aina siirtyä yhdestä kannasta toiseen säilyttäen kardinaliteetti samana. Kaikki kannat ovat näin ollen samankokoiset.

Tasaisuus. Absorptiivisuus

Jos $F \subseteq E$, merkitään n_F :llä F :n viivojen indusoiman G :n aligraafin $\langle F \rangle$ pisteiden lukumäärää ja k_F :llä sen komponenttien lukumäärää. Silloin $\langle F \rangle$:n virittävässä metsässä on $n_F - k_F$ viivaa. Merkitään vielä K_F :llä G :n aligraafin G_F komponenttien lukumäärää. Näin ollen ilmeisesti

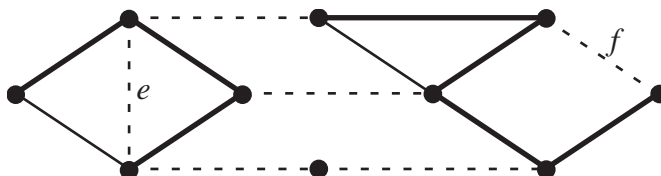
$$\rho_{M(G)}(F) = n_F - k_F = n - K_F.$$

Kaikki tällaiset virittävät metsät ovat siis samankokoisia, joten

Tasaisuus: Jos $F \subseteq E$, niin kaikki maksimaaliset F :n sisältämät riippumattomat joukot ovat samankokoisia. (Joukon H maksimaalisuus tarkoittaa tässä, että ei ole sellaista riippumatonta joukkoa J , että $H \subset J \subseteq F$.)

Yleisesti, tasainen perinnöllinen järjestelmä on matroidi. Ts. tasaisuus on sopiva aspekti.

Alla olevassa kuvassa yhtenäiset viivat ovat F :n viivat ja näistä paksimmat virittävän met-sän viivat, katkoviivat ovat E :n muut viivat.



Jos e on G :n viiva ja $\rho_{M(G)}(F + e) = \rho_{M(G)}(F)$, niin e ei yhdistä G_F :n kahta eri komponenttia. Jos f on toinen samanlainen viiva, ts. $\rho_{M(G)}(F + f) = \rho_{M(G)}(F)$, niin ilmeisestikin myös

$$\rho_{M(G)}(F + e + f) = \rho_{M(G)}(F).$$

Näin saadaan

Heikko absorptiivisuus: Jos $e, f \in E$ ja $F \subseteq E$ sekä

$$\rho_M(F) = \rho_M(F + e) = \rho_M(F + f),$$

niin myös

$$\rho_M(F + e + f) = \rho_M(F).$$

Yleisesti, heikosti absorptiivinen perinnöllinen järjestelmä on matroidi. Ts. heikko absorptiivisuus on sekin sopiva aspekti.

Toistamalla tätä argumenttia voidaan todeta, että jos F ja F' ovat G :n viivojen joukkoja ja jokaiselle F' :n viivalle e on $\rho_{M(G)}(F + e) = \rho_{M(G)}(F)$, niin

$$\rho_{M(G)}(F \cup F') = \rho_{M(G)}(F).$$

Näin ollen

Vahva absorptiivisuus: Jos $F, F' \subseteq E$ sekä $\rho_M(F + e) = \rho_M(F)$ jokaiselle F' :n alkiolle e , niin

$$\rho_M(F \cup F') = \rho_M(F).$$

Yleisesti, myös vahvasti absorptiivinen perinnöllinen järjestelmä on matroidi. Ts. vahvakin absorptiivisuus on sopiva aspekti.

Lisäysominaisuus

Jos I_1 ja I_2 ovat piirimatroidin $M(G)$ riippumattomia joukkoja (alimetsiä viivajoukkoina) ja $\#(I_1) < \#(I_2)$, niin aligraafissa G_{I_1} on $n - \#(I_1)$ komponenttia ja aligraafissa G_{I_2} on $n - \#(I_2)$ komponenttia, eli siis vähemmän kuin G_{I_1} :ssä. Viivan lisääminen ei vähennä komponenttien lukumäärää tarkalleen silloin, kun viiva lisätään johonkin komponenttiin. Näin ollen, jos minkä tahansa $I_2 - I_1$:n viivan lisääminen G_{I_1} :een säilyttää komponenttien lukumäärän samana, niin viiva lisätään johonkin G_{I_1} :n komponenttiin, ja G_{I_2} :ssa olisi täten ainakin yhtä monta komponenttia kuin G_{I_1} :ssä. Kuten todettu, näin ei ole jos $\#(I_1) < \#(I_2)$, joten

Lisäysominaisuus: Jos I_1 ja I_2 ovat perinnöllisen järjestelmän M riippumattomia joukkoja ja $\#(I_1) < \#(I_2)$, niin on olemassa sellainen alkio $e \in I_2 - I_1$, että $I_1 + e$ on \mathcal{I}_M :ssä.

Yleisesti, perinnöllinen järjestelmä, jolla on lisäysominaisuus, on matroidi. Ts. lisäysominaisuus on sopiva aspekti.

Eliminoituvuusominaisuus

Piirimatroidin $M(G)$ piirit ovat nimenomaan G :n piirit tulkittuina viivajoukoiksi. Piirin jokaisen pisteen aste on 2. Jos C_1 ja C_2 ovat $M(G)$:n eri piirejä, niin rengassumman $\langle C_1 \rangle \oplus \langle C_2 \rangle$ jokaisen pisteen aste on myös parillinen, ks. pykälä 1.3. Silloin $\langle C_1 \rangle \oplus \langle C_2 \rangle$:ssa on oltava ali-graafina ainakin yksi piiri, sillä rengassummassa ei ole irtopisteitä ja ei-tyhjässä metsässä on ainakin yksi loppupiste (Lause 2.3). Muistellen graafin rengassumman määritelmää pykälässä 1.3, todetaan että mainittu piiri ei sisällä leikkauksen $C_1 \cap C_2$ viivoja, ei ainakaan yhtä moninkertaisena kuin $C_1 \cup C_2$. Näin saadaan

Eliminoituvuus: Jos C_1 ja C_2 ovat perinnöllisen järjestelmän M eri piirejä ja $e \in C_1 \cap C_2$, niin on sellainen piiri $C \in \mathcal{C}_M$, että $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.

Yleisesti, perinnöllinen järjestelmä, jolla on eliminoituvuusominaisuus, on matroidi. Ts. myös eliminoituvuus on sopiva aspekti.

Indusoitujen piirien ominaisuus

Jos I on piirimatriisin $M(G)$ riippumaton joukko (eli alimetsä viivajoukoksi tulkittuna), niin yhden viivan lisääminen siihen joko aikaansaa jossain G_I :n komponentissa yhden piirin (Lause 2.3) tai sitten se yhdistää kaksi G_I :n eri komponenttia eikä aikaansaa piiriä. Siispä

Indusoitujen piirien ominaisuus: Jos I on perinnöllisen järjestelmän M riippumaton joukko ja $e \in E$, niin $I + e$ sisältää enintään yhden piirin.

Yleisesti, perinnöllinen järjestelmä, jolla on indusoitujen piirien ominaisuus, on matroidi. Ts. tämäkin ominaisuus on sopiva aspekti.

7.3 Muita perusmatroideja

Vektoraalimatroidi

Jos E on äärellinen joukko jonkin vektoriavaruuden (esimerkiksi \mathbb{R}^n :n) vektoreita ja perinnöllisen järjestelmän M riippumattomat joukot ovat tarkalleen kaikki lineaarisesti riippumattomat E :n alijoukot (mukana myös tyhjä joukko), niin M on ns. *vektoraalimatroidi*. Yleisesti tässä sallitaan se, että E on multijoukko, ts. se voi sisältää alkionsa monta kertaa—vrt. graafin moninkertainen viiva. Tällöin sovitaan, että E :n osajoukko, jossa on jokin alkio mukana useamman kerran, on lineaarisesti riippuva. Perinnöllistä järjestelmää M , joka ei suoranaisesti ole vektoraalimatroidi, mutta on rakenteeltaan identtinen jonkin vektoraalimatroidin M' kanssa, kutsutaan *lineaariseksi matroidiksi* ja matroidia M' kutsutaan M :n *esitykseksi*.

Vektoraalimatroidin piiri on sellainen vektorijoukko C , että se on lineaarisesti riippuva, mutta muuttuu lineaarisesti riippumattomaksi, jos siitä poistetaan alkio—mikä tahansa, muista mahdolliset monikertaiset alkiot. Vektoraalimatroidille tyypillinen aspekti on eliminoituvuus. Jos $C_1 = \{\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$ ja $C_2 = \{\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_l\}$ ovat eri piirejä, joilla on yhteisenä (ainakin) vektori \mathbf{r} , niin \mathbf{r} voidaan esittää sekä C_1 :n että C_2 :n muiden vektoreiden lineaariyhdelmänä ja vieläpä siten, että kaikki yhdelmien kertoimet ovat $\neq 0$. Näin saadaan yhtälö

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{r}_i - \sum_{j=1}^l c'_j \mathbf{r}'_j = \mathbf{0}.$$

Yhdistämällä vasemmalla puolella (mahdolliset) samat vektorit ja huomaamalla, ettei vasen puoli sittenkään supistu kokonaan nollavektoriksi, nähdään, että $C_1 \cup C_2 - \mathbf{r}$ sisältää piirin. (Huomaa erityisesti tapaus, jossa joko $C_1 = \{\mathbf{r}, \mathbf{r}\}$ tai $C_2 = \{\mathbf{r}, \mathbf{r}\}$.)

Erityisesti, jos E muodostuu jonkin matriisin \mathbf{A} sarakkeista (tai riveistä), kutsutaan vektoraalimatroidia *matriisimatroidiksi* ja merkitään $M(\mathbf{A})$:lla. Esimerkiksi graafin G piirimatroidi $M(G)$ on lineaarinen matroidi, jonka esitys saadaan, kun valitaan vektorijoukoksi G :n piirimatriisin rivit binäärikunnassa $\text{GF}(2)$ (ks. pykälä 4.5).³ Luonnollisesti jokainen vektoraalimatroidi voidaan ajatella matriisimatroidina jos niin halutaan, muodostetaan vain E :n vektoreista matriisi.⁴

³Perinnöllisiä järjestelmiä, joilla on esitys binäärikunnassa $\text{GF}(2)$, kutsutaan *binäärisiksi matroideiksi*. Graafin piirimatroidi on aina binäärinen.

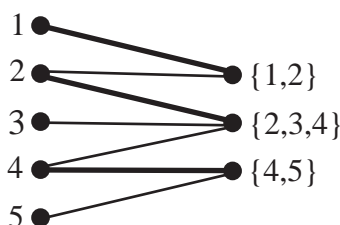
⁴Tämä on oikeastaan nimen ”matroidi” alkuperä. Matroidi on lineaarisen matroidin yleistys ja lineaarinen matroidi taas on ajateltavissa matriisina. Kaikki matroidit eivät nimittäin ole lineaarisia. Nimeä ”matroidi” on aikanaan ankarasti vastustettu eivätkä sitä vieläkään kaikki käytä vaan puhuvat ”geometriasta” tai ”kombinatorisesta geometriasta”.

Transversaalimatroidi

Äärellisten ei-tyhjiä joukkojen perheen $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ transversaalimatroidi $M(\mathcal{A})$ on joukon $E = A_1 \cup \dots \cup A_k$ perinnöllinen joukko, jonka riippumattomat joukot ovat tarkalleen ne joukot, jotka sisältävät enintään yhden alkion kustakin joukosta A_i (mukana tyhjä joukko). Tässä \mathcal{A} on jälleen multijoukko, ts. joukko A_i voi esiintyä siinä alkiona useammankin kerran, sallien näin monen A_i :n alkion esiintyä riippumattomassa joukossa.

Transversaalimatroidille luontainen aspekti on lisäysominaisuus, ja se liittyy kaksijakoisen graafin sovituksen lisäykseen! (Ks. pykälä 5.8.) Muodostetaan kaksijakoinen graafi $G = (V, E')$ seuraavasti: Pistejoukko on $V = E \cup \mathcal{A}$ ja pisteiden e sekä A_j välillä on viiva tarkalleen silloin, kun $e \in A_j$. (Huomaa miten pistejoukko V jakaantuu luonnostaan kahteen irrotuksen osaan, E :hen ja \mathcal{A} :han, joilla ei ole yhteisiä alkioita.) Jokainen $M(\mathcal{A})$:n riippumaton joukko on silloin jonkin G :n sovituksen E :ssä olevien pisteiden joukko ja kääntäen.

Esimerkki. Alla on kuvattuna perheen $\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5\}\}$ transversaalimatroidia vastaava kaksijakoinen graafi sekä sen riippumaton joukko $\{1, 2, 4\}$ (paksu viiva).



Hyvin samaan tapaan kuin Lauseen 5.3 todistuksessa voidaan todeta, että jos I_1 ja I_2 ovat riippumattomia joukkoja (sovituksen S_1 sekä S_2 pistejoukkoja) ja $\#(I_1) < \#(I_2)$, niin sovitukselle S_1 on sellainen lisäyspolku, että saatu uusi sovitettu piste on I_2 :ssa. Näin ollen $M(\mathcal{A})$:lla on lisäysominaisuus.

Huomautus. Ajatellen kaksijakoisen graafin sovituksia *eo. tilanne on täysin yleinen. Ts. kaksijakoisen graafin sovitukset ovat aina ajateltavissa erään transversaalimatroidin riippumattomiksi joukoiksi. Itse asiassa aivan yleisenkin graafin sovitukset ovat tällä tavoin ajateltavissa matroidina (ns. sovitusmatroidina), ks. SWAMY & THULASIRAMAN.*

Jos \mathcal{A} :n joukot ovat erillisiä—ts. ne muodostavat E :n partition—niin transversaalimatroidia kutsutaan myös *partitiomatroidiksi*. Partitiomatroidille lisäysominaisuus on ilmeinen.

Tasamatroidi

Kaikille äärellisille joukoille E voidaan määrittellä *tasamatroidi*. Astetta k oleva E :n tasamatroidi $U_k(E)$ on perinnöllinen järjestelmä, jonka riippumattomat joukot ovat tarkalleen kaikki E :n osajoukot, joissa on enintään k alkioita. $U_k(E)$:n kannat ovat ne E :n osajoukot, joissa on tarkalleen k alkioita, ja piirit ne osajoukot, joissa on tarkalleen $k + 1$ alkioita. Erityisesti E :n astetta $\#(E)$ olevaa tasamatroidia kutsutaan usein E :n *vapaaksi matroidiksi*. Ilmeisesti $U_k(E)$:lla on kannanvaihto-ominaisuus sekä lisäysominaisuus.

Tasamatroidit eivät sinällään ole kovin kiinnostavia, niitä voidaan kuitenkin usein käyttää ”rakennuspalikoina” määriteltäessä mutkikkaampia matroideja. Helposti on todettavissa sekin, että tasamatroidit ovat transversaalimatroideja (miten?).

7.4 Ahne algoritmi

Monet kombinatoriset optimointitehtävät⁵ ovat puettavissa jonkin joukon E perinnöllisen järjestelmän M painavimman tai kevyimmän riippumattoman joukon etsimiseksi, kun E :n alkioille on annettu painot, joita merkitään funktiolla $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$, ja joukon $F \subseteq E$ paino on

$$\sum_{e \in F} \alpha(e).$$

Nämä kaksi optimointitehtävyyppiä vaihtuvat keskenään, kun painojen merkki vaihdetaan.

Myös voidaan etsiä M :n painavimpia tai kevyimpiä kantoja. Jälleen vaihtamalla painojen merkit maksimointi ja minimointi vaihtavat paikkaa. Mikäli M :n kaikki kannat ovat samankokoisia—kuten on laita matroideilla—ne voidaan edelleen rajoittaa tapaukseen, jossa painot ovat positiiviset. Jos nimittäin A on pienin E :n alkion paino, niin vaihtamalla painofunktioksi

$$\beta : \beta(e) = 1 + \alpha(e) - A$$

saadaan ekvivalentti tehtävä, jossa painot ovat positiiviset. Kannan maksimointi vaihtuu puolestaan minimoinniksi ja kääntäen, kun otetaan painofunktioksi

$$\beta : \beta(e) = 1 + B - \alpha(e),$$

missä B suurin E :n alkion paino.

Esimerkki. *Kruskalin algoritmi (ks. pykälä 5.6) etsii—vähän yleistettynä—viivapainotetun graafin G kevyimmän virittävän metsän, ts. G :n piirimatroidin kevyimmän kannan. Kuten nähtiin, kevyin virittävä metsä löytyy silloin nopeasti—ja vielä nopeammin, mikäli viivat ovat saatavilla kasvavan painon järjestyksessä, jolloin valitaan vain aina tarkasteltavaksi ”paras” eli kevyin jäljellä oleva viiva. Kruskalin 1. algoritmi onkin esimerkki ns. ahneesta algoritmista, joka aina etenee ”parhaaseen” käsillä olevaan suuntaan. Tällainen ahne algoritmi on nopea, senhän vain tarvitsee etsiä ”paras” alkio lisättäväksi jo saatuun joukkoon.*

Myös Kruskalin 3. algoritmi on ahne algoritmi, se etsii painavimman virittävän vastametsän piirimatriisin duaalimatroidissa, ns. irrotusmatroidissa (ks. pykälä 7.6).

Vaikka ahne algoritmi tuottaa piirimatroidin kantojen tapauksessa oikean tuloksen, se ei aina sitä tee.

Esimerkki. *Viivapainotetun graafin G kevyimmän Hamiltonin piirin etsiminen voidaan myös pukea erään perinnöllisen järjestelmän kevyimmän kannan etsimiseksi—olettaen että Hamiltonin piirejä on olemassa. Silloin valitaan E :ksi jälleen G viivojen joukko, mutta valitaan kanoiksi G :n Hamiltonin piirit (viivajoukkoina). Kevyin kanta on nyt kevyin Hamiltonin piiri. Kuten pykälässä 5.7 todettiin, kevyimmän Hamiltonin piirin etsiminen (kaupparatsuprobleema) on toisaalta tunnettu \mathcal{NP} -täydellinen tehtävä eikä mikään ahne algoritmi voi näin tuottaa aina oikeaa tulosta—ei ainakaan, jos $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$. Näin saatu perinnöllinen järjestelmä ei kuitenkaan ole yleensä matroidi. (Sillä ei esimerkiksi yleensä ole kannanvaihto-ominaisuutta.)*

Näyttäisi siis siltä, että ainakin matroideille ahne algoritmi on suotuisa menetelmä painavimman/kevyimmän kannan (tai riippumattoman joukon) etsimiseksi. Itse asiassa matroidit ovat nimenomaan ne perinnölliset järjestelmät, joille näin on. Jotta asiaa päästään käsittelemään tarkemmin, määritellään *ahne algoritmi* formaalisesti. Käsitellään ensin riippumattomien joukkojen maksimointia, minimointia koskeva osa on hakasuluissa. Syötteenä on siis joukon E perinnöllinen järjestelmä M ja painofunktio α .

⁵Enemmän tällaisia optimointitehtäviä käsitellään kurssilla Matemaattinen optimointiteoria 2.

Ahne algoritmi riippumattomille joukoille:

1. Järjestetään joukon E alkiot e_1, \dots, e_m vähenevän [kasvavan] painon järjestykseen: $e_{(1)}, \dots, e_{(m)}$.
2. Asetetaan $F \leftarrow \emptyset$ ja $k \leftarrow 1$.
3. Jos $\alpha(e_{(k)}) \leq 0$ [$\alpha(e_{(k)}) \geq 0$], lopetetaan ja tulostetaan F .
4. Jos $\alpha(e_{(k)}) > 0$ [$\alpha(e_{(k)}) < 0$] ja $F \cup \{e_{(k)}\}$ on riippumaton, asetetaan $F \leftarrow F \cup \{e_{(k)}\}$.
5. Jos $k = m$, tulostetaan F ja lopetetaan. Muussa tapauksessa asetetaan $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 3.

Kantojen tapauksessa algoritmi on vielä yksinkertaisempi:

Ahne algoritmi kannoille:

1. Järjestetään joukon E alkiot e_1, \dots, e_m vähenevän [kasvavan] painon järjestykseen: $e_{(1)}, \dots, e_{(m)}$.
2. Asetetaan $F \leftarrow \emptyset$ ja $k \leftarrow 1$.
3. Jos $F \cup \{e_{(k)}\}$ on riippumaton, asetetaan $F \leftarrow F \cup \{e_{(k)}\}$.
4. Jos $k = m$, tulostetaan F ja lopetetaan. Muussa tapauksessa asetetaan $k \leftarrow k + 1$ ja mennään kohtaan 3.

Päätulos, joka kytkee ahneen algoritmin toiminnan ja matroidisuuden toisiinsa, on

Lause 7.2. (Matroidien ahneuslause) *Ahne algoritmi riippumattomille joukoille tuottaa perinnöllisen järjestelmän painavimman riippumattoman joukon kaikille painofunktiolle tarkalleen silloin, kun kyseessä on matroidi. (Tämä on ns. ahneusominaisuus.) Vastaava tulos pätee myös kannoille, ja edelleen kevyimpien riippumattomien joukkojen sekä kantojen etsimiselle. Lisäksi molemmissa tapauksissa voidaan rajoittaa positiivisiin painoihin.*

Todistus. Ekvivalenssi matroidisuuden kanssa esitetään Lauseen 7.3 todistuksessa seuraavassa pykälässä.

Kuten edellä todettiin, ahneusominaisuus on ekvivalentti maksimoinnille ja minimoinnille, niin riippumattomille joukoille kuin kannoillekin. Myös todettiin, että painavimman kannan etsiminen voidaan rajoittaa positiiville painoille. Koska positiivisille painoille painavin riippumaton joukko on automaattisesti kanta, seuraa ahneusominaisuus kannoille ahneusominaisuudesta riippumattomille joukoille.

Toisaalta, jos ahneusominaisuus pätee kannoille, se pätee myös riippumattomille joukoille. Riippumattoman joukon maksimointi painofunktiolle α vastaa silloin kannan maksimointia positiiviselle painofunktiolle

$$\beta : \beta(e) = 1 + \max(0, \alpha(e)),$$

ahneet algoritmit toimivat täsmälleen samoin, sillä kohta 3. ei nyt esiinny lainkaan riippumattomille joukoille. Lopputuloksesta pitää vain poistaa 1-painoiset alkiot. \square

Huomautus. *Ahneusominaisuus on siis myös matroidin määrittelevä aspekti. Perinnöllisille joukoille se on ekvivalentti ahneen algoritmin käyttökelpoisuuden kanssa. Tietyille samantapaisille yleisemmille joukkojärjestelmille on myös omat ”ahneuslauseensa”. Tällaisia ovat mm. ns. greedoidit sekä matroidiupotukset.*

7.5 Yleinen matroidi

Mikä tahansa edellä esitetyistä aspekteista tekee perinnöllisestä järjestelmästä matroidin. Kun vielä todetaan, että ne ovat kaikki keskenään ekvivalentit, voidaan määritellä *matroidi* perinnölliseksi järjestelmäksi, jolla on jokin mainituista aspekteista.

Lisätään listaan vielä yksi aspekti, joka on hankalammin suoraan todettavissa piirimatroidille:

Alimodulaarisuus: Jos M on joukon E perinnöllinen järjestelmä ja $F, F' \subseteq E$, niin

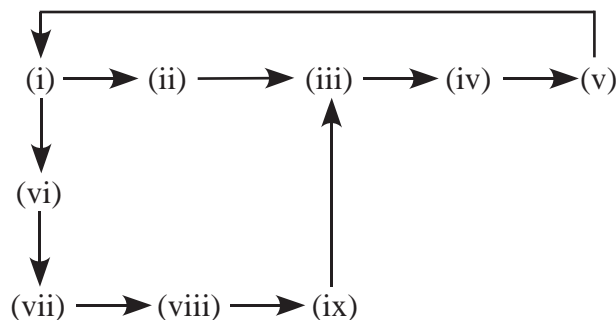
$$\rho_M(F \cap F') + \rho_M(F \cup F') \leq \rho_M(F) + \rho_M(F').$$

Näytetään sitten mainittu ekvivalenssi, mukaanlukien vielä alimodulaarisuuskin.

Lause 7.3. Jos perinnöllisellä järjestelmällä on yksikin alla olevasta yhdeksästä aspektista, niin sillä on ne kaikki (ja se on matroidi).

- | | |
|------------------------------|----------------------------------------|
| (i) Tasaisuusominaisuus | (vi) Alimodulaarisuus |
| (ii) Kannanvaihto-ominaisuus | (vii) Eliminoituvuusominaisuus |
| (iii) Lisäysominaisuus | (viii) Indusoitujen piirien ominaisuus |
| (iv) Heikko absorptiivisuus | (ix) Ahneusominaisuus |
| (v) Vahva absorptiivisuus | |

Todistus. Todistetaan implikaatiot seuraavan vahvasti yhtenäisen digraafin mukaisesti:



Tällöin kaikki yhdeksän eri aspektia ovat yhdistetyt toisiinsa implikaatioketjuilla ja ne ovat näin ekvivalentit. Tarkastellaan yleisesti joukon E perinnöllistä järjestelmää M .

(i) \Rightarrow (ii): Tasaisuusominaisuuden seurauksena kaikki M :n kannat ovat samankokoisia. Jos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_M$ ja $e \in B_1 - B_2$, niin sovelletaan tasaisuutta joukkoon $F = (B_1 - e) \cup B_2$. Kaikki maksimaaliset F :ään sisältyvät riippumattomat joukot ovat siis samankokoisia kuin B_2 (ja B_1). $B_1 - e$ ei ole tällainen maksimaalinen riippumaton joukko, siinä on yhtä liian vähän alkioita. Toisaalta lisäämällä $B_1 - e$:hen yksi alkio f saadaan mainitunlainen riippumaton joukko H . Alkion f on tultava erotuksesta $B_2 - B_1$, joten $H = B_1 - e + f$. Lisäksi H :ssa on yhtä monta alkioita kuin B_1 :ssä, joten se on kanta.

(ii) \Rightarrow (iii): Jos $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_M$ ja $\#(I_1) < \#(I_2)$, valitaan sellaiset kannat B_1 ja B_2 , että $I_1 \subseteq B_1$ ja $I_2 \subseteq B_2$. Käytetään kannanvaihto-ominaisuutta (toistuvasti) ja vaihdetaan tarvittaessa B_2 :n alkioiksi ne $B_1 - I_1$:n alkioita, jotka eivät ole B_2 :ssa. Tämän jälkeen voidaan olettaa, että $B_1 - I_1 \subseteq B_2$. Kannanvaihto-ominaisuuden seurauksena kaikki kannat ovat samankokoisia. Koska näin ollen

$$\#(B_1 - I_1) = \#(B_1) - \#(I_1) > \#(B_2) - \#(I_2) = \#(B_2 - I_2),$$

$B_1 - I_1$ ei voi sisältyä $B_2 - I_2$:een. Siispä I_2 :ssa on jokin $B_1 - I_1$:n alkio e ja $I_1 + e$ on riippumaton joukko.

(iii) \Rightarrow (iv): Tarkastellaan tilannetta, jossa

$$\rho_M(F) = \rho_M(F + e) = \rho_M(F + f).$$

Mikäli nyt $\rho_M(F + e + f) > \rho_M(F)$, valitaan maksimaalinen riippumaton F :n osajoukko I_1 sekä maksimaalinen riippumaton $F + e + f$:n osajoukko I_2 . Silloin $\#(I_2) > \#(I_1)$ ja lisäysominaisuuden nojalla I_1 :tä voidaan lisätä yhdellä I_2 :n alkiolla. Tämä alkio ei voi tulla F :stä (miksi?), joten sen on oltava joko e tai f . Tällöin kuitenkin joko $\rho_M(F) < \rho_M(F + e)$ tai $\rho_M(F) < \rho_M(F + f)$ (\surd).

(iv) \Rightarrow (v): Tässä oletetaan heikko absorptiivisuus ja tarkastellaan sellaisia E :n osajoukkoja F ja F' , että $\rho_M(F + e) = \rho_M(F)$ jokaiselle F' :n alkiolle e . Käytetään induktiota luvun $k = \#(F' - F)$ suhteen ja näytetään, että $\rho_M(F) = \rho_M(F \cup F')$ (vahva absorptiivisuus).

Induktion lähtökohta: Nyt $k = 0$ tai $k = 1$ ja asia on selvä.

Induktio-oletus: Tulos on oikea, kun $k \leq \ell$. ($\ell \geq 1$)

Induktio-väite: Tulos on oikea, kun $k = \ell + 1$.

Induktioväitteen todistus: Valitaan eri alkio $e, f \in F' - F$ ja merkitään $F'' = F' - e - f$. Induktio-oletuksen nojalla

$$\rho_M(F) = \rho_M(F \cup F'') = \rho_M(F \cup F'' + e) = \rho_M(F \cup F'' + f).$$

Soveltamalla tähän heikkoa absorptiivisuutta nähdään, että

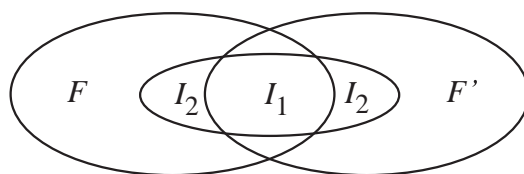
$$\rho_M(F) = \rho_M(F \cup F'' + e + f) = \rho_M(F \cup F').$$

(v) \Rightarrow (i): Jos I on maksimaalinen riippumaton F :n osajoukko, niin $\rho_M(I + e) = \rho_M(I)$ (mahdollisille) erotuksen $F - I$:n alkiolle e . Vahvan absorptiivisuuden vuoksi silloin $\rho_M(F) = \rho_M(I) = \#(I)$, ts. kaikki tällaiset riippumattomat joukot I ovat samankokoisia ja tasaisuusominaisuus on voimassa.

(i) \Rightarrow (vi): Tarkastellaan joukkoja $F, F' \subseteq E$ ja merkitään maksimaalista riippumatonta leikkauksen $F \cap F'$ maksimaalista riippumatonta osajoukkoa I_1 :llä ja yhdisteen maksimaalista $F \cup F'$ riippumatonta osajoukkoa I_2 :lla. Tasaisuudesta seuraa lisäysominaisuus, joten voidaan olettaa, että I_2 saadaan I_1 :stä lisäämällä alkioita, ts. $I_1 \subseteq I_2$. Nyt $I_2 \cap F$ on F :n riippumaton osajoukko ja $I_2 \cap F'$ on F' :n riippumaton osajoukko, ja kumpikin sisältää I_1 :n. Siispä

$$\begin{aligned} \rho_M(F \cap F') + \rho_M(F \cup F') &= \#(I_1) + \#(I_2) \\ &\stackrel{*}{=} \#(I_2 \cap F) + \#(I_2 \cap F') \leq \rho_M(F) + \rho_M(F'). \end{aligned}$$

Tähdellä merkitty yhtäsuuruus on joukko-opillinen, ks. alla oleva kuva.



(vi) \Rightarrow (vii): Otetaan tarkasteltavaksi eri piirit $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_M$ ja alkio $e \in C_1 \cap C_2$. Silloin $\rho_M(C_1) = \#(C_1) - 1$ ja $\rho_M(C_2) = \#(C_2) - 1$ ja vielä $\rho_M(C_1 \cap C_2) = \#(C_1 \cap C_2)$. (Muista, että jokainen piirin aito osajoukko on riippumaton.) Mikäli nyt $C_1 \cup C_2 - e$ ei sisällä piiriä, niin

se on riippumaton ja $\rho_M(C_1 \cup C_2 - e) = \#(C_1 \cup C_2) - 1$, ja siis $\rho_M(C_1 \cup C_2) \geq \#(C_1 \cup C_2) - 1$. Alimodulaarisuuden nojalla kuitenkin

$$\rho_M(C_1 \cap C_2) + \rho_M(C_1 \cup C_2) \leq \rho_M(C_1) + \rho_M(C_2),$$

josta seuraa (totea!), että

$$\#(C_1 \cap C_2) + \#(C_1 \cup C_2) \leq \#(C_1) + \#(C_2) - 1.$$

Tämä on joukko-opillisesti mahdotonta. Näin ollen $C_1 \cup C_2 - e$ sisältää piirin.

(vii) \Rightarrow (viii): Jos I on riippumaton joukko ja $I + e$ sisältää kaksi eri piiriä C_1 ja C_2 , niin ilmeisesti sekä C_1 että C_2 sisältää silloin alkion e . Eliminointiominaisuuden nojalla $C_1 \cup C_2 - e$ sisältää piirin. Mutta koska $C_1 \cup C_2 - e$ sisältyy I :hin, se on kuitenkin riippumaton (\checkmark). Siispä $I + e$ sisältää enintään yhden piirin.

(viii) \Rightarrow (ix): Merkitään I :llä ahneen algoritmin tulostetta painofunktiolla α . (Kyseessä on painavimman riippumattoman joukon etsintä.) Jos I on ko. painavin riippumaton joukko, asia on selvä. Muussa tapauksessa valitaan painavimmista riippumattomista joukoista sellainen, jolla on suurin leikkaus I :n kanssa. Merkitään tätä painavinta riippumatonta joukkoa I' :lla. I ei voi olla I' :n osajoukko, muuten ahne algoritmi tulostaisi painavimman riippumattoman joukon. Merkitään e :llä ensimmäistä erotuksen $I - I'$ alkioita, jonka ahne algoritmi valitsee mukaan. $I' + e$ on riippuva joukko ja se siis sisältää tarkalleen yhden piirin C (muista indusoitujen piirien ominaisuus). Tämä piiri ei tietenkään sisälly I :hin, joten voidaan valita alkio $f \in C - I$. Koska $I' + e$ sisältyy vain yhden piiriin, $I' + e - f$ on riippumaton joukko. I' on maksimaalinen, joten $\alpha(f) \geq \alpha(e)$. Toisaalta f ja ne I :n alkioita, jotka ahne algoritmi valitsi ennen e :tä, ovat kaikki I' :ssa, joten f :n lisääminen mainittuihin alkioihin ei muodosta piiriä. Näin ollen f oli käytettävissä ahneen algoritmin valitessa e :n, mikä tietää että $\alpha(f) \leq \alpha(e)$. Siis $\alpha(f) = \alpha(e)$ ja joukot $I' + e - f$ sekä I' ovat yhtä painavat. Tämä on kuitenkin vastoin I' :n valintaa, sillä $\#((I' + e - f) \cap I) > \#(I' \cap I)$. (Lukija huomaa tietyn yhtäläisyyden tämän ja Lauseen 5.2 todistuksen kanssa. Itse asiassa näin saadaan uusi todistus sille, että Kruskalin 1. algoritmi toimii.)

(ix) \Rightarrow (iii): Tarkastellaan riippumattomia joukkoja I_1 ja I_2 , joille $\#(I_1) < \#(I_2)$. Merkitään lyhyden vuoksi $k = \#(I_1)$. Otetaan nyt käyttöön painofunktio

$$\alpha : \alpha(e) = \begin{cases} k + 2, & \text{jos } e \in I_1 \\ k + 1, & \text{jos } e \in I_2 - I_1 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Silloin I_2 :n paino on

$$\sum_{e \in I_2} \alpha(e) \geq (k + 1)^2 > k(k + 2) = \sum_{e \in I_1} \alpha(e),$$

eli siis suurempi kuin I_1 :n paino, joten I_1 ei ole painavin riippumaton joukko. Toisaalta ahne algoritmi valitsee painavinta riippumatonta joukkoa etsiessään ahneudessaan kaikki I_1 :n alkioita ennen ensimmäistään $I_2 - I_1$:n alkioita. Koska se nyt oletuksen mukaan tulostaa painavimman riippumattoman joukon, sen on otettava mukaan vielä ainakin yksi $I_2 - I_1$:n alkio e ja $I_1 + e$ on täten riippumaton joukko. Lisäysominaisuus on siis voimassa. \square

Käytetyin matroidin määrittävä aspekti lienee lisäysominaisuus.

7.6 Matroidien operaatioita

Edellä graafien virittävien puiden ja niihin liittyvien perusirrotusjoukkojen sekä peruspiirien yhteydessä mainittiin usein näiden duaalisuus. Duaalisuus on toisaalta ominaisuus, joka on hyvin luonnollinen perinnöllisille järjestelmille sekä matroideille.

Joukon E perinnöllisen järjestelmän M duaali(järjestelmä) on joukon E perinnöllinen järjestelmä M^* , jonka kannat ovat M :n kantojen komplementit (E :tä vastaan). Usein duaali-järjestelmän M^* kantoja kutsutaan M :n vastakannoiksi, piirejä M :n vastapiireiksi jne. Kyseessä on todellakin perinnöllinen järjestelmä: Jos \overline{B}_1 ja \overline{B}_2 ovat M^* :n eri kantoja, niin B_1 ja B_2 ovat M :n eri kantoja. Näin ollen, jos $\overline{B}_1 \subseteq \overline{B}_2$, niin $B_2 \subseteq B_1$ (\checkmark). Huomaa vielä, että $(M^*)^* = M$.

Lause 7.4. (Whitneyn lause) *Matroidin M duaali M^* on matroidi, ns. duaalimatroidi, ja*

$$\rho_{M^*}(F) = \#(F) - \rho_M(E) + \rho_M(\overline{F}).$$

(Huomaa, että $\rho_M(E)$ on M :n kannan koko.)

Todistus. Näytetään, että M^* :lla on kannanvaihto-ominaisuus, jolloin se Lauseen 7.3 mukaan on matroidi. Jos \overline{B}_1 ja \overline{B}_2 ovat M^* :n kantoja ja $e \in \overline{B}_1 - \overline{B}_2$, niin B_1 ja B_2 ovat M :n eri kantoja ja $e \in B_2 - B_1$. Koska B_1 on M :n kanta, $B_1 + e$ sisältää tarkalleen yhden M :n piirin C (indusoitujen piirien ominaisuus) ja tässä piirissä on oltava jokin alkio $f \in B_2 - B_1$. Mutta silloin $B_1 + e - f$ ei sisällä M :n piiriä eli se on M :n riippumaton joukko ja sen koko on sama kuin B_1 :n. Koska kaikki kannat ovat aina samankokoisia, on $B_1 + e - f$ näin ollen M :n kanta, ja sen komplementti $\overline{B}_1 - e + f$ puolestaan on M^* :n kanta.

Rangin $\rho_{M^*}(F)$ laskemiseksi valitaan maksimaalinen M^* :n riippumaton joukko H , joka sisältyy F :ään. Tällöin

$$\rho_{M^*}(F) = \rho_{M^*}(H) = \#(H).$$

Silloin \overline{H} on minimaalinen sellainen joukon \overline{F} sisältävä joukko, että se sisältää jonkin M :n kannan. (Sama asia vain toisin sanottuna. Huomaa, että H sisältyy johonkin M^* :n kantaan.) Mutta tällainen joukkohan saadaan, kun lähdetään \overline{F} :stä, otetaan maksimaalinen \overline{F} :ään sisältyvä M :n riippumaton joukko—jossa on $\rho_M(\overline{F})$ alkioita—ja jatketaan se kannaksi—jossa taas on $\rho_M(E)$ alkioita. Siispä

$$\#(\overline{H}) - \#(\overline{F}) = \rho_M(E) - \rho_M(\overline{F}).$$

Joukko-opillisista syistä

$$\#(\overline{H}) + \#(H) = \#(E) = \#(\overline{F}) + \#(F).$$

Näistä yhdistämällä saadaan esitetty rangin $\rho_{M^*}(F)$ laskukaava (totea!). □

Dualiikka antaa yhteyden matroidin M kantojen ja sen duaalimatroidin M^* piirien (eli M :n vastapiirien) välille:

Lause 7.5. (i) *Matroidin M duaalimatroidin piirit ovat minimaaliset sellaiset joukot, jotka leikkaavat jokaista M :n kanta.*

(ii) *Matroidin M kannat ovat minimaaliset sellaiset joukot, jotka leikkaavat jokaista duaalimatroidin M^* piiriä.*

Todistus. (i) M^* :n piirit ovat minimaaliset joukot, jotka eivät sisälly minkään M :n kannan komplementtiin. Näin ollen niiden täytyy leikata jokaista M :n kanta.

(ii) M^* :n kannat ovat maksimaaliset joukot, jotka eivät sisällä mitään M^* :n piiriä. Sama asia toisin: M :n kannat ovat minimaaliset joukot, jotka leikkaavat jokaista M^* :n piiriä. □

Esimerkki. Yhtenäisen graafin G piirimatroidin $M(G)$ kannat ovat G :n virittävät puut. Sen duaalimatroidin $M^*(G)$ kannat ovat näiden komplementit eli virittävät vastapuut. Duaalimatroidin piirit puolestaan ovat lauseen nojalla G :n irrotusjoukot. (Vrt. Lauseet 2.4 ja 2.5.) Koska $M^*(G)$ on Whitneyyn lauseen mukaisesti matroidi, sillä on ahneusominaisuus, ts. ahne algoritmi löytää sille painavimman/kevyimmän kannan. Tähän perustuu Kruskalin 3. algoritmin toimivuus. Se etsii graafille painavimman virittävän vastapuun.

Vastaavat käsitteet ovat luonnollisesti määriteltävissä yleiselle, mahdollisesti epäyhtenäiselle graafille G . Silloin $M^*(G)$:n kannat ovat G :n virittävät vastametsät. Duaalimatroidia $M^*(G)$ kutsutaan G :n irrotusmatroidiksi tai vastapiirimatroidiksi. Entäs milloin irrotusmatroidi $M^*(G)$ olisi graafinen, ts. jonkin (toisen) graafin piirimatroidi? Ns. Whitneyyn tasottuvuuslause sanoo, että näin käy tarkalleen silloin, kun G on tasottuva! (Ks. esimerkiksi WEST.)

Jos M_i on joukon E_i perinnöllinen järjestelmä ($i = 1, \dots, k$), niin järjestelmien M_1, \dots, M_k suora summa $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ on joukon $E = E_1 \cup \dots \cup E_k$ perinnöllinen järjestelmä, jonka riippumattomat joukot ovat tarkalleen kaikki joukot $I_1 \cup \dots \cup I_k$, missä $I_i \in \mathcal{I}_{M_i}$ ($i = 1, \dots, k$). Erityisesti jos $E_1 = \dots = E_k = E$, sanotaan suoraa summaa M järjestelmien M_1, \dots, M_k yhdisteeksi, merkitään $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$. Huomaa, että yleensäkin voitaisiin ajatella kutakin järjestelmää M_i myös joukon E perinnöllisenä järjestelmänä lisäämällä vain $E - E_i$ alkioit piireiksi (tarkemmin sanoen silmukoiksi).

Ei ole kovin vaikeaa todeta, että jos M_1, \dots, M_k ovat matroideja ja joukot E_1, \dots, E_k ovat pareittain erillisiä, niin $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ on matroidi, näyttämällä vaikkapa, että sillä on lisäusominaisuus (tee se!). Yleisempikin tulos pätee:

Lause 7.6. (Matroidien yhdistelause⁶) Jos M_1, \dots, M_k ovat joukon E matroideja, niin yhdiste $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$ on myös joukon E matroidi ja

$$\rho_M : \rho_M(F) = \min_{F' \subseteq F} \left(\#(F - F') + \sum_{i=1}^k \rho_{M_i}(F') \right).$$

Todistus. Todistus on varsin pitkä ja sivuutetaan (ks. esimerkiksi WEST tai OXLEY.) Mainittakoon, että rangia koskeva kaava ei päde yleisesti perinnöllisille järjestelmille. \square

Tällä on monia perustavaa laatua olevia seurauksia, esimerkiksi

Seuraus. (Matroidien peittolause⁷) Jos M on joukon E silmukaton matroidi, niin pienin määrä riippumattomia joukkoja, joiden yhdiste on E , on

$$\max_{F \subseteq E} \left\lceil \frac{\#(F)}{\rho_M(F)} \right\rceil.$$

Todistus. Huomaa, että koska M :ssä ei ole silmukoita, jokainen E :n alkio on itsessään riippumaton joukko. Joukko E voidaan siis peittää mainitulla tavalla. Otetaan yhdistelauseessa matroideiksi M_1, \dots, M_k nyt k kopiota M :stä. Silloin E on k :n M :n riippumattoman joukon yhdiste tarkalleen silloin, kun se on yhdistematroidin $M' = M_1 \cup \dots \cup M_k$ riippumaton joukko. Tarkasteltu peitto-ominaisuus voidaan nyt ilmaista muodossa $\rho_{M'}(E) = \#(E)$ ja se on yhdistelauseen mukaan sama kuin että

$$\#(E) = \min_{F \subseteq E} \left(\#(E - F) + \sum_{i=1}^k \rho_{M_i}(F) \right)$$

⁶Tunnetaan myös nimellä *Edmonds–Fulkerson-lause* tai *Matroidien summalause*.

⁷Tunnetaan myös nimellä *Edmondsin peittolause*.

eli

$$\min_{F \subseteq E} (k\rho_M(F) - \#(F)) = 0.$$

Koska minimoitava erotus on $= 0$, kun F on tyhjä joukko, k on siis pienin sellainen luku, että $k \geq \#(F)/\rho_M(F)$ kaikille ei-tyhjille osajoukoille $F \subseteq E$. \square

Esimerkki. *Silmukattoman graafin $G = (V, E)$ piirimatroidin $M(G)$ tapauksessa riippumattomat joukot ovat G :n alimetsät ja kysymys on siis siitä montako alimetsää vähintään tarvitaan, jotta ne sisältäisivät kaikki G :n viivat. Merkitään mainittua lukumäärää $A(G)$:llä, sitä kutsutaan G :n arborisuudeksi.*

Peittolauseessa esiintyvän maksimoinnin analysoimiseksi jaetaan viivojen indusoima ali-graafi $\langle F \rangle$ komponentteihinsa, joiden piste- ja viivaluvut ovat vastaavasti n_1, \dots, n_{k_F} sekä m_1, \dots, m_{k_F} . Valitaan lisäksi indeksointi siten, että

$$\frac{m_{k_F}}{n_{k_F} - 1} \geq \frac{m_{k_F-1}}{n_{k_F-1} - 1} \geq \dots \geq \frac{m_1}{n_1 - 1}.$$

Yleisesti, jos $\frac{x_2}{y_2} \geq \frac{x_1}{y_1}$, niin $\frac{x_2}{y_2} \geq \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$. Näin ollen

$$\frac{m_2}{n_2 - 1} \geq \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

ja, jatkamalla tästä induktiivisesti, edelleen

$$\frac{m_i}{n_i - 1} \geq \frac{m_1 + \dots + m_i}{n_1 + \dots + n_i - i} \quad (i = 1, \dots, k_F).$$

Erityisesti siis

$$\frac{m_{k_F}}{n_{k_F} - 1} \geq \frac{m_1 + \dots + m_{k_F}}{n_1 + \dots + n_{k_F} - k_F} = \frac{\#(F)}{\rho_{M(G)}(F)}.$$

Maksimoitaessa voidaan näin rajoittua sellaisiin viivajoukkoihin F , että $\langle F \rangle$ on yhtenäinen, jolloin $\rho_{M(G)}(F) = n_F - 1$, missä n_F on F :n pisteluku. (Lisäksi voitaisiin vielä rajoittua sellaisiin viivajoukkoihin F , että $\langle F \rangle$ on myös pisteidensä generoima aligraafi, sillä kahden jo yhdistetyn pisteen yhdistäminen viivalla kasvattaa maksimoitavan osamäärän osoittajaa yhdellä nimittäjän pysyessä samana.) Näin saadaan arborisuudelle kuuluisa Nash-Williamsin kaava

$$A(G) = \max_{F \subseteq E} \left\lceil \frac{\#(F)}{n_F - 1} \right\rceil.$$

Huomattakoon, että koska yksinkertaiselle tasottuvalle graafille $\#(F) \leq 3n_F - 6$ (Lineaarinen raja sovellettuna $\langle F \rangle$:ään), on $A(G)$ tällöin enintään 3.

Joukon E perinnöllisen järjestelmän M rajoittuma joukkoon $F \subseteq E$ on perinnöllinen järjestelmä $M|F$, jonka riippumattomat joukot ovat tarkalleen ne F :n osajoukot, jotka ovat M :n riippumattomia osajoukkoja. M :n *kutistuma* joukkoon F on puolestaan perinnöllinen järjestelmä $(M^*|F)^*$, merkitään $M.F$. Ilmeisesti M :n lisäysominaisuus siirtyy suoraan $M|F$:ään, joten (ks. Whitney'n lause)

Lause 7.7. *Jos M on joukon E matroidi ja $F \subseteq E$, niin $M|F$ sekä $M.F$ ovat myös matroideja.*

Matroidin M *alimatroideja* ovat ne matroidit, jotka saadaan M :stä peräkkäisillä rajoittumilla ja kutistumilla.

Kirjallisuus

1. ANDRÁSFAL, B.: *Introductory Graph Theory*. The Institute of Physics (1978)
2. ANDRÁSFAL, B.: *Graph Theory: Flows, Matrices*. The Institute of Physics (1991)
3. BANG-JENSEN, J. & GUTIN, G.: *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag (2002)
4. BOLLOBÁS, B.: *Modern Graph Theory*. Springer-Verlag (2002)
5. CHRISTOFIDES, N.: *Graph Theory. An Algorithmic Approach*. Academic Press (1975)
6. DIESTEL, R.: *Graph Theory*. Springer-Verlag (2005)
7. DOLAN, A. & ALDOUS, J.: *Networks and Algorithms. An Introductory Approach*. Wiley (1999)
8. GIBBONS, A.: *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge University Press (1987)
9. GIBBONS, A. & RYTTER, W.: *Efficient Parallel Algorithms*. Cambridge University Press (1990)
10. GONDRAN, M. & MINOUX, M.: *Graphs and Algorithms*. Wiley (1986)
11. GRIMALDI, R.P.: *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Addison-Wesley (2003)
12. GROSS, J. & YELLEN, J.: *Graph Theory and Its Applications*. CRC Press (2006)
13. GROSS, J. & YELLEN, J.: *Handbook of Graph Theory*. CRC Press (2003)
14. HOPCROFT, J.E. & ULLMAN, J.D.: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley (1979)
15. JUNGNIKEL, D.: *Graphs, Networks and Algorithms*. Springer-Verlag (2004)
16. MCELIECE, R.J. & ASH, R.B. & ASH, C.: *Introduction to Discrete Mathematics*. McGraw-Hill (1990)
17. MCHUGH, J.A.: *Algorithmic Graph Theory*. Prentice-Hall (1990)
18. MEHLHORN, K.: *Graph Algorithms and NP-Completeness*. Springer-Verlag (1984)
19. NOVAK, L. & GIBBONS, A.: *Hybrid Graph Theory and Network Analysis*. Cambridge University Press (1999)
20. OXLEY, J.G.: *Matroid Theory*. Oxford University Press (2006)

21. READ, R.C. & WILSON, R.J.: *An Atlas of Graphs*. Oxford University Press (2004)
22. SKIENA, S.S.: *The Algorithm Design Manual*. Springer–Verlag (1998)
23. SWAMY, M.N.S. & THULASIRAMAN, K.: *Graphs, Networks, and Algorithms*. Wiley (1981)
24. SWAMY, M.N.S. & THULASIRAMAN, K.: *Graphs: Theory and Algorithms*. Wiley (1992)
25. VÁGÓ, I.: *Graph Theory. Application to the Calculation of Electrical Networks*. Elsevier (1985)
26. WALTHER, H.: *Ten Applications of Graph Theory*. Kluwer (1985)
27. WEST, D.B.: *Introduction to Graph Theory*. Prentice–Hall (2001)

Hakemisto

- admittanssimatriisi 44
 ahne algoritmi 96
 ahneusominaisuus 97,98
 aligraafi 3
 alimatroidi 103
 alimetsä 19
 alimodulaarisuus 98
 alipuu 19
 alkupiste 6,26
 alusgraafi 26
 approksimaatioalgoritmi 48
 arborisuus 103
 aspekti 90
 aste 2,8,91
 astefunktio 91
 asyklinen 30
 asymptoottinen vaativuus 47
 avoin kulku 6
 BFS-puu 56
 bijektiivinen merkintä 17
 binäärinen matroidi 94
 Boolean summa 49
 Davidson–Harel-algoritmi 88
 Demoucronin algoritmi 85
 deterministinen algoritmi 47
 DFS-metsä 54
 DFS-puu 51
 digraafi 26
 Dijkstran algoritmi 58
 duaalimatroidi 101
 Edmonds–Fulkerson-lause 102
 Edmonds–Karp-modifikaatio 81
 Edmondsin peittolause 102
 ei-kyllästetty 78,79
 eliminoituvuusominaisuus 93,98
 energian säilymlaki 46
 epädeterministinen algoritmi 47
 erotus 11
 esitys 94
 etenevä nuoli 79
 Eulerin monitahokaskaava 84
 Floydin algoritmi 60
 Ford–Fulkerson-algoritmi 81
 genus 87
 graafi 1
 graafinen matroidi 91,102
 greedoidi 97
 Hallin lause 76
 Hamiltonin piiri 68,96
 Heawoodin algoritmi 87
 Heawoodin lause 87
 hehkutusalgoritmi 69,88
 heikko absorptiivisuus 92,98
 Hopcroft–Tarjan-algoritmi 85
 impedanssimatriisi 44
 induoitu aligraafi 5
 induoitujen piirien ominaisuus 94,98
 injektiivinen merkintä 17
 insidenssimatriisi 33
 irrotus 16
 irrotusavaruus 46
 irrotusjoukko 16
 irrotusmatriisi 35
 irrotusmatroidi 102
 irrotusminimaalinen virittävä puu 63
 irrotuspiste 14
 irtopiste 2
 isomorfismi 18
 isomorfisuus 18
 Jarnikin algoritmi 67
 juuri 28,51
 kaksijakoinen graafi 17,73
 kanoninen merkintä 31
 kannanvaihto-ominaisuus 92,98
 kanta 90
 kapasiteetti 77
 kapasiteettiehto 77
 Karp–Held-heuristiikka 71
 kaupparatsuprobleema 68
 kertalukunotaatio 47
 kevyin polku 58,60
 kevyin virittävä puu 63
 kierros 6
 Kirchhoffin laki 41,77
 klikki 5
 kompleksisuus 47
 komplementti 10,48
 komponentti 7,41
 kromaattinen luku 87
 Kruskalin algoritmi 64,96,102
 kulku 5
 kunta 46
 Kuratowskin lause 85
 kutistuma 103
 kvasivahva yhtenäisyys 27
 kyllästetty 78,79
 laji 87
 Las Vegas -algoritmi 48
 laskennallinen vaativuus 47
 lehti 28

- leikkaus 11
- leveysetsintä 56
- lineaarinen matroidi 94
- Lineaarinen raja 84
- lisäysominaisuus 93,98
- lisäyspolku 73,79
- lisäyspuu 74
- lohko 14
- lokaalisesti minimaalinen virittävä puu 64
- loppupiste 2,26
- loppupiste 6
- loppuviiva 2
- lähde 31
- lähtevä nuoli 26
- lähtöaste 26
- läpilähde 41
- läpisyure 41
- läpivektori 41
- maksimaalinen sovitus 73
- maksimiaste 3
- maksimisovitus 73,81
- maksimivirtaus 77
- Marimontin algoritmi 31
- Marriage Theorem 76
- matriisimatroidi 94
- Matroidien ahneuslause 97
- Matroidien peittolause 102
- Matroidien yhdistelause 102
- matroidi 25,98
- Matroidien yhdistelause 102
- matroidiupotus 97
- Max-Flow Min-Cut -lause 80
- menonuoli 53
- merkintä 17
- merkitty graafi 17
- metsä 19
- minimaalinen virittävä puu 64
- minimi-irrotus 78
- minimiaste 3
- Minimiasteraja 84
- Monte Carlo -algoritmi 48
- multiplisiteetti 1
- naapuripuu 63
- Nash-Williamsin kaava 103
- Neliväri-lause 87
- nielu 30
- nollagraafi 2
- \mathcal{NP} -kova 48
- \mathcal{NP} -täydellinen 48,69
- nulliteetti 8
- nuoli 26
- oksa 20
- paino 17
- painomatriisi 60
- painotus 17
- paluunuoli 54
- paluuviiva 51
- partitiomatroidi 95
- perinnöllinen järjestelmä 90
- perusirrotusjoukko 23
- perusirrotusjoukkojen oukko 23
- perusirrotusmatriisi 37
- peruspiiri 22
- peruspiirijoukko 22
- peruspiirimatriisi 39
- perusyhtälöt 42
- piiri 6,90
- piiriavaruus 46
- piirimatriisi 38
- piirimatroidi 91,102,103
- piiriminimaalinen virittävä puu 63
- piiritön graafi 9
- piirtäminen 83,88
- piste 1
- pisteen aste 2
- pisteen poisto 12
- pisteiden joukko 1
- pisteiden yhdistäminen 13
- pituus 6
- planaarisuus 83
- poikkilähde 41
- poikkinuoli 54
- poikkisyure 41
- poikkivektori 41
- polku 6
- polynomiaikainen 48
- potentiaali 41
- potentiaalivektori 41
- Primin algoritmi 67
- probabilistinen algoritmi 48
- puu 19
- puunuoli 53
- puuviiva 51
- päätepiste 2
- rajoittuma 103
- rangi 8,34,91
- rangifunktio 91
- reduktio 48
- reitti 6
- rengassumma 11
- reunapiste 83
- reunaviiva 83
- riippumaton joukko 90
- riippuva joukko 90

rinnakkaiset viivat 2
 ristiriita 9
 rumuusfunktio 88
 saavutettavuusmatriisi 49
 selviämätön 48
 selviävä 48
 separoitumaton 14
 separoituva 14
 side 20
 siirtoverkko 77
 silmukka 2,91
 silmä 83
 sopiva erotus 12
 sovitus 73,95
 stationäärinen lineaarinen verkko 41
 stokastinen algoritmi 48
 suljettu kulku 6
 suora summa 102
 suunnattu graafi 26
 suunnattu kulku 26
 suunnattu piiri 26
 suunnattu polku 26
 suunnattu puu 28
 suunnattu reitti 26
 suunnistettu irrotus 35
 suunnistettu piiri 38
 sykli 30
 symmetrinen erotus 11
 syvyysetsintä 50
 takeneva nuoli 79
 tasaisuusominaisuus 92,98
 tasamatroidi 95
 tasograafi 83
 tasottuvuus 83,102,103
 Tellegenin lause 46
 tiivistys 27
 topologinen lajittelu 31
 transversaalimatroidi 95
 triviaali graafi 2
 tuleva nuoli 26
 tuloaste 26
 tyhjä graafi 2
 täydellinen graafi 3
 täydellinen kaksijakoinen graafi 17
 täydellinen sovitus 76
 täysi insidenssimatriisi 33
 ulkosilmä 83
 unkarilainen algoritmi 74
 unkarilainen puu 74
 vaativuus 47
 vahva absorptiivisuus 93,98
 vahva komponentti 27
 vahvasti yhdistetyt pisteet 27
 vahvasti yhtenäinen 27
 vapaa matroidi 95
 vastakanta 101
 vastapiiri 101
 vastapiirimatroidi 102
 vektoraalimatroidi 94
 vierekkäiset pisteet 2
 vierekkäiset viivat 2
 vieruspisteet 2
 vieruspistematriisi 32
 vierussilmä 83
 vierusviivat 2
 Viisiväri-lause 87
 viitepiste 33
 viiva 1
 viivan kutistaminen 13
 viivan poisto 13
 viivojen joukko 1
 virittävä 1-puu 71
 virittävä metsä 22
 virittävä puu 19
 virittävä suunnattu puu 30
 virittävä vastapuu 19
 virtauksen arvo 77
 virtaus 77
 vuorotteleva polku 73
 vuorotteleva puu 74
 väri 87
 väritettävyys 87
 Warshallin algoritmi 49
 Whitney'n lause 101
 Whitney'n tasottuvuuslause 102
 yhdiste 11,102
 yhdistetyt pisteet 6
 yhtenäinen graafi 6
 ylitysluku 87
 äärellinen graafi 3