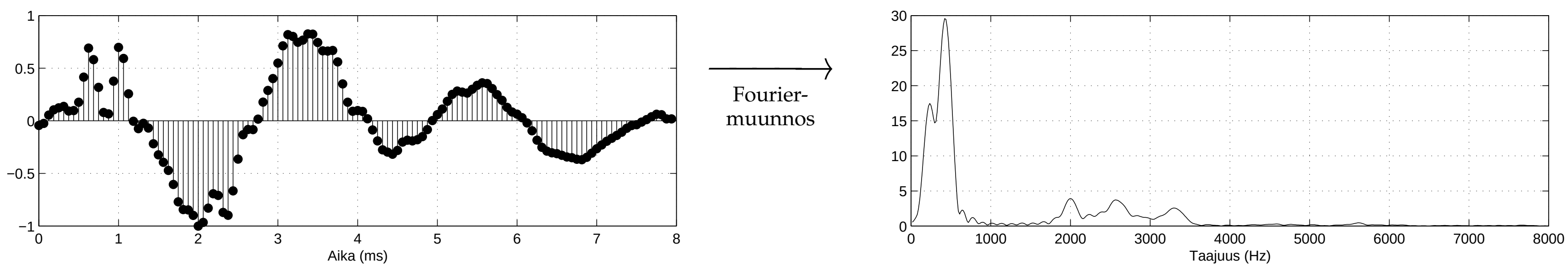
Kompleksiluvut signaalin taajuusjakauman arvioinnissa

Vierailuluento IMA1-kurssilla

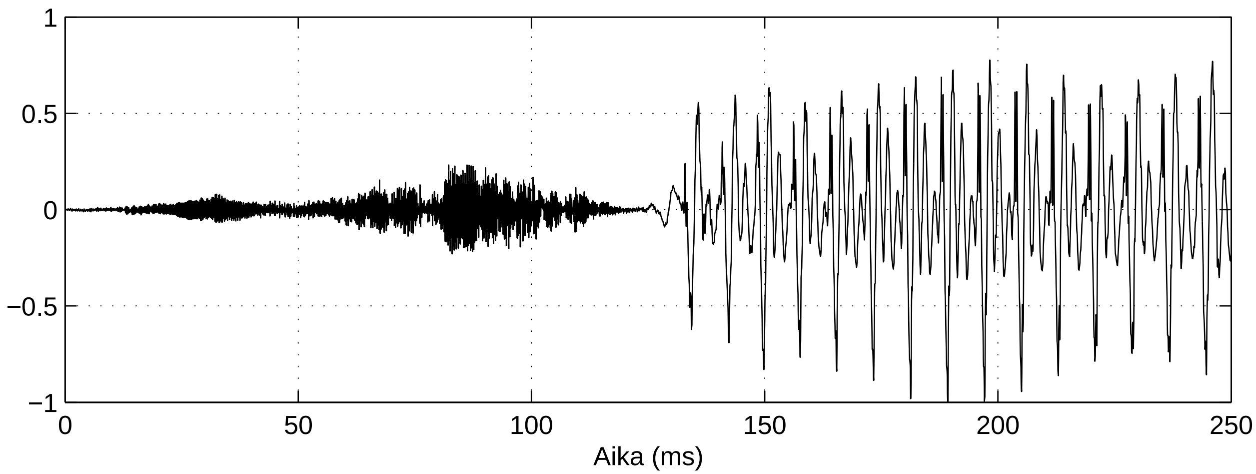
Heikki Huttunen
Lehtori, TkT
Signaalinkäsittely, TTY
heikki.huttunen@tut.fi

Fourier-muunnos

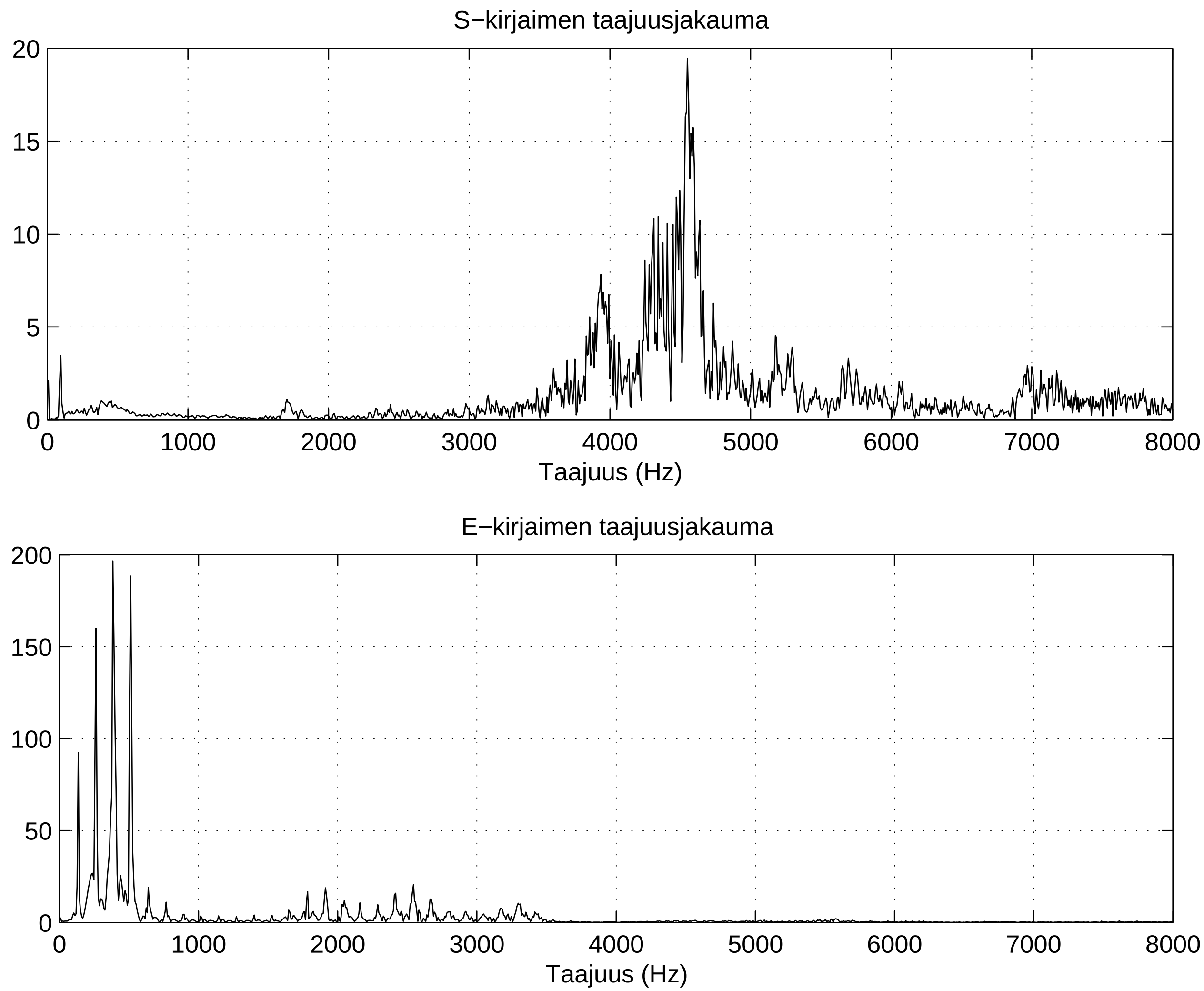
Fourier-muunnos liittää signaalin näytearvot sen sisältämiin taajuuksiin ja vastaa kysymykseen: "kuinka paljon signaalissa on kutakin taajuutta". Muunnoksen tuloksena saadaan signaalin taajuusjakauma. Alla olevassa kuvassa on vasemmalla eräs testisignaali ja oikealla sen Fourier-muunnos, josta näkyy selvästi mikä on äänisignaalin hallitseva taajuus.



Seuraavassa kuvassa on pidempi näyte samasta signaalista. Kuvan signaali sisältää sanan "seitsemän" kaksi ensimmäistä kirjainta. S-kirjain sijaitsee alusta lukien noin 125 millisekunnin matkalla, ja seuraavassa 125 millisekunnissa on E-kirjain. Konsonantin ja vokaalin ero näkyy hyvin: soinnillisen vokaalin kohdalla on selkeä ylös-alas-värähtelykuvio ja konsonantin kohdalla lukuarvot ovat satunnaisempia.



Useille erityyppisille signaaleille on luontevaa ajatella niiden koostuvan yksittäisistä taajuuksista (yksittäisistä sinisignaaleista sopivassa suhteessa). Esimerkiksi äänisignaaleita on helpoin ymmärtää ja analysoida niiden taajuusjakauman kautta. Alla olevissa kuvissa on laskettu edellisen kuvan S- ja E-kirjainten taajuusjakaumat, eli Fourier-muunnokset. Kuvista näkyy selvästi, että S-kirjaimen sisältämät taajuudet jakautuvat melko laajalle alueelle sekä melko suurillekin taajuuksille, kun E-kirjain sisältää vain yksittäisiä pieniä taajuuksia (korkeat piikit).



Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) ja käänteinen diskreetti Fourier-muunnos

(IDFT) on mahdollista esittää matriisimuodossa seuraavasti. Olkoon $x(n)$ muunnettava signaali, ja vektori

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

sen yksi jakso. Tällöin sen diskreetti Fourier-muunnos saadaan kertomalla vektori $\mathbf{x}$ matriisilla

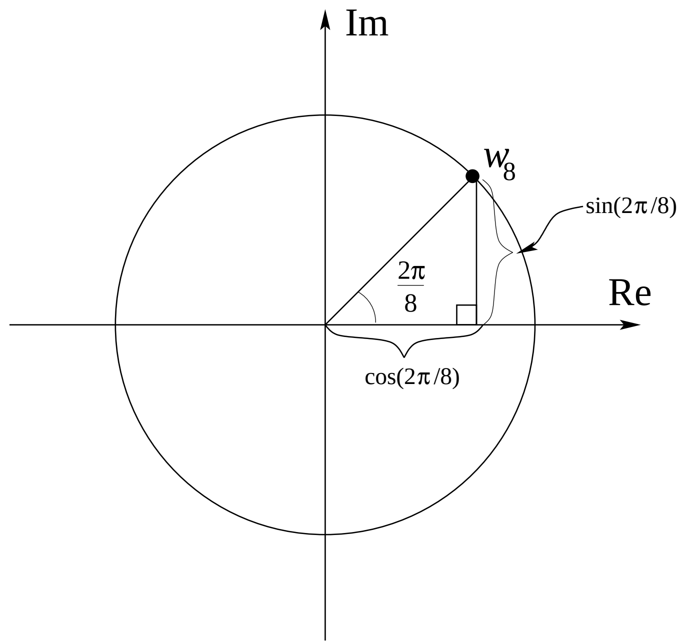
$$\begin{pmatrix} w_N^0 & w_N^0 & w_N^0 & \dots & w_N^0 \\ w_N^0 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \dots & w_N^{-(N-1)} \\ w_N^0 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \dots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N^0 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \dots & w_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Esimerkiksi perusjaksolla $N = 4$ DFT saadaan laskettua kertomalla vektori matriisilla

$$\begin{pmatrix} w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 \\ w_4^0 & w_4^{-1} & w_4^{-2} & w_4^{-3} \\ w_4^0 & w_4^{-2} & w_4^{-4} & w_4^{-6} \\ w_4^0 & w_4^{-3} & w_4^{-6} & w_4^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Diskreetin Fourier-muunnoksen määritelmässä on kertoimena luku $w_N = e^{2\pi i/N}$, joka on nimeltään *ykkösen* N*:s juuri* (N'th root of unity). Tämä lukuhan on Eulerin kaavan mukaan $w_N = e^{2\pi i/N} = \cos(2 * \pi/N) + i\sin(2 * \pi/N)$.

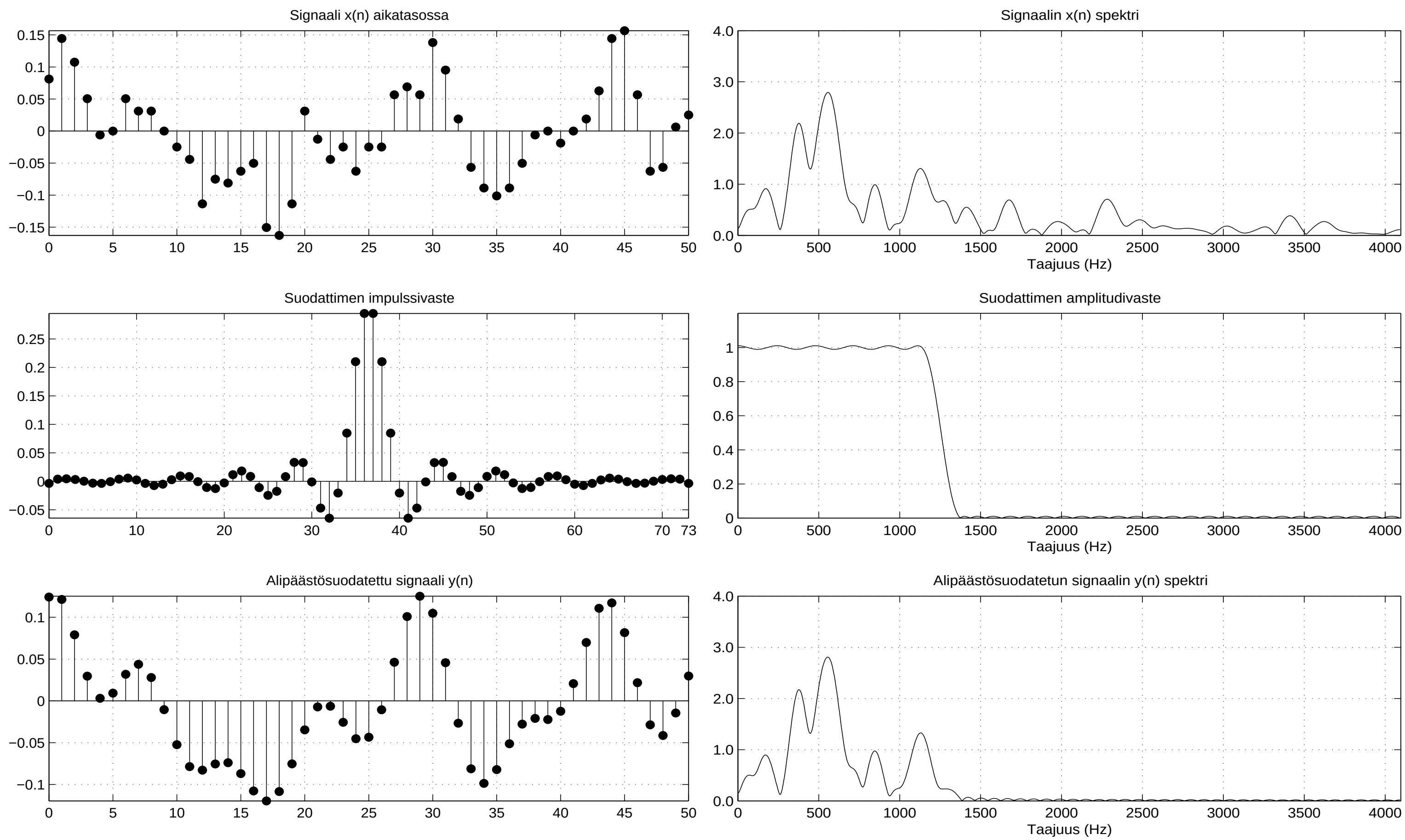
Luku w_N sijaitsee kompleksitason yksikköympyrällä kulmassa $2\pi/N$. Kulma on $\frac{1}{N}$ koko ympyrästä, ks. kuva.



Signaalin taajuussisältöä saadaan muokattua ns. *konvoluution* avulla. Konvoluutio ajassa vastaa kertolaskua taajuudessa, joten meidän täytyy vain suunnitella sopiva konvoluutio-operaatio.

Alla olevissa kuvissa on esimerkki suodatuksen vaikutuksesta signaalin taajuuksiin. Ylimmässä kuvaparissa on vasemmalla eräs testisignaali ja oikealla sen sisältämät taajuudet. Keskimmäisessä kuvaparissa on vasemmalla erään suotimen impulssivaste ja oikealla sen amplitudivaste. Suodin on nyt suunniteltu yllä olevien vaatimusten mukaiseksi, eli säilyttämään pienet taajuudet ja poistamaan suuret. Suodatettaessa testisignaali tällä suotimella (eli laskemalla signaalin ja impulssivasteen konvoluutio) tapahtuu samalla taajuustasossa kertolasku. Konvoluution tuloksessa (alin kuvapari) ovat suuret taajuudet todellakin poistuneet ja pienet taajuudet säilyneet ennallaan. Tämä johtuu siitä, että suurilla taajuuksilla amplitudivaste on lähellä nollaa ja pienillä taajuuksilla lähellä ykköstä. Nollalla kertominen poistaa ja ykkösellä kertominen säilyttää taajuudet.

Taajuudet erottelevalla suodatuksella on lukuisia sovelluksia. Yhtenä esimerkkinä voidaan mainita MP3-pakkaus: kompressiovaiheessa valtaosa prosessoriajasta kuluu signaalin jakoon eri taajuuskaistoihin. Tämä on välttämätöntä, jotta eri taajuusalueita voidaan käsitellä eri lailla ja bittejä poistaa sieltä, missä kuulo on epäherkin.


Signaali x(n) aikatasossa
Signaalin x(n) spektri
Taajuus (Hz)
Suodattimen impulssivaste
Suodattimen amplitudivaste
Taajuus (Hz)
Alipäästösuodatettu signaali y(n)
Alipäästösuodatetun signaalin y(n) spektri
Taajuus (Hz)