



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

PAULI RAUTAKORPI
LEIJAVOIMALAN TEHON ARVIOINTI

Kandidaatintyö

Tarkastaja: lehtori Risto Silvennoinen
Palautuspäivä: 16.9.2008

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

RAUTAKORPI, PAULI: Leijavoimalan tehon arviointi

Kandidaatintyö, 34 sivua, 5 liitesivua

Syyskuu 2008

Pääaine: Matematiikka

Tarkastaja: lehtori Risto Silvennoinen

Avainsanat: leijavoimala, leija, sähköntuotanto, tuulienergia

Leijavoimala on uudentyypinen tuulivoimala, jossa energiaa kerätään tuulesta leijaa lennättämällä. Tässä työssä esitellään leijavoimalatyypin, jonka toiminta perustuu vuorotteleviin sähköntuotantovaiheeseen ja paluuvaiheeseen. Sähköntuotantovaiheessa leija vetää maassa olevaa generaattoria pyörittävän rummun ympärille kalluttua köyttä mahdollisimman suurella voimalla pois rummulta, jolloin generaattori tuottaa pyöriessään sähköä. Paluuvaiheessa puolestaan leijan vetovoima minimoidaan ja köysi kelataan takaisin rummun ympärille käyttämällä generaattoria moottorina.

Tässä työssä johdetaan leijan ja köyden voimatasapainoa tarkastelemalla kaava kyseisen leijavoimalatyypin teholle sähköntuotantovaiheen aikana. Tämä kaava mahdollistaa leijavoimalan tehon arvioimisen voimalan mittojen ja leijan ominaisuuksien avulla ilman simulaatioita tai kokeita. Tehokaavan johtaminen sisältää myös muita hyödyllisiä tuloksia, esimerkiksi suurimman tehon antavan köyden vapautusnopeuden, joka on noin yksi kolmasosa köyden suuntaisesta tuulen nopeudesta.

Työn lopussa olevan esimerkin mukaan jo tavallisella viiden neliömetrin leijalla voidaan saavuttaa lähes 50 kilowatin teho 12 m/s tuulella, ja tehokaavan mukaan leijavoimalan teho kasvaa suunnilleen lineaarisesti leijan pinta-alaa suurennettaessa, neliöllisesti leijan aerodynaamista tehokkuutta parannettaessa ja kuutiollisesti tuulen nopeuden lisääntyessä. Näin leijasta kannattaa tehdä mahdollisimman virtaviivainen ilmanvastuksen minimoimiseksi ja tehon maksimoimiseksi, ja perinteisistä tuulivoimaloistakin tuttu tehon kuutiollinen kasvu tuulennopeuden mukana korostaa merkittävästi leijan avulla saavutettavien korkealla puhaltavien voimakkaampien ja vakaampien tuulien tarjoamaa tehoetua perinteisiin tuulivoimaloihin verrattuna.

ALKUSANAT

Tämä kandidaatintyö on osa Tampereen teknillisen yliopiston Matematiikan laitoksen leijavoimalaprojektia, jonka on perustanut työn ohjaaja Risto Silvennoinen. Työ perustuu leijavoimalaprojektissa työskennelleen Ivan Argatovin kesällä 2007 tekemiin laskelmiin, jotka olen esittänyt uudelleen Argatovin kirjoittamaa raporttia yksityiskohtaisemmin ja monessa paikassa merkittävästikin eri tavalla. Tämän työn esityksen välivaiheet perustuvat tarkistuslaskelmiini eivätkä suoraan Argatovin muistiinpanoihin.

Työn aiheena oleva leijavoimala on kansainvälisestikin varsin uusi tutkimuskohde. Uutuutensa vuoksi leijavoimaloihin liittyvä perustutkimuskin on vasta alussa, joten olen joutunut valitsemaan tämän työn alussa esiteltävän leijavoimalatyypin leijavoimaloita tutkivien Laddermill- ja KiteGen-projektien julkaisuissa esitettyjen ideoiden joukosta. Leijavoimalatyypin valinnan perustana ovat olleet aikaisempien julkaisujen tiedot, Risto Silvennoisen suositukset sekä omat päätelmäni eri leijavoimaloiden toimivuudesta ja toteuttamiskelpoisuudesta. Tässä työssä leijavoimalan toteutusta käsitellään mahdollisimman lyhyesti ja yleisellä tasolla, sillä pääsisältönä on mahdollisimman yleiskäyttöisen tehoarvion johtaminen.

SISÄLLYS

1. Johdanto	1
2. Leijavoimalan toimintaperiaate	4
3. Leijan nopeuslain johtaminen	7
3.1 Teorian perusteet	7
3.1.1 Koordinaatistojen määrittely	7
3.1.2 Efektiivinen tuuli ja aerodynaaminen voima	8
3.2 Leijan sivuttaisliike	10
3.2.1 Sivuttaisliikkeen geometriaa	10
3.2.2 Paikkavektoria vastaan kohtisuora voimatasapaino	11
3.2.3 Sivuttaisliikkeen nopeus ja aerodynaaminen tehokkuus	13
3.2.4 Köyden ilmanvastuksen arviointi	14
3.2.5 Leijan lentonopeus	16
4. Leijavoimalan tehoarvio	18
4.1 Köyden jännitys	18
4.1.1 Jännityksen muuttuminen köydessä	18
4.1.2 Paikkavektorin suuntainen voimatasapaino leijassa	20
4.2 Keskimääräinen teho sähköntuotantovaiheessa	21
4.2.1 Paikkavektorin suuntaiset keskimääräiset voimat	21
4.2.2 Leijavoimalan tehokaava	23
4.3 Leijavoimalan teho optimaalisella köyden vapautusnopeudella	25
4.3.1 Teho köyden vapautusnopeuden funktiona	25
4.3.2 Köyden vapautusnopeuden optimointi	25
4.3.3 Optimaalinen köyden vapautusnopeus ja teho	27
5. Esimerkki tehokaavan käytöstä	28
6. Yhteenveto	32
Lähteet	34
Liite1: Nopeus, kiihtyvyys ja Newtonin toinen laki pallokoordinaatistossa	35
Liite2: Lentoradan pituuden laskeminen	38

SYMBOLIT

$\langle \rangle$	Suureen aikakeskiarvo yhden leijan lentämän kierroksen ajalta
α	Vektorien $\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$ ja $\hat{\mathbf{w}}$ välinen kulma, esitetty kuvassa 3.2
$\Delta\theta$	Puolet leijan kahdeksikkoradan korkeudesta
$\Delta\phi$	Puolet leijan kahdeksikkoradan leveydestä
θ	Pystysuoran ja leijan paikkavektorin välinen kulma, esitetty kuvassa 3.1
$\dot{\theta}$	Kulman θ aikaderivaatta
θ_*	Pystysuoran ja leijan paikkavektorin välinen kulma leijan lentoradan keskellä
μ	Köyden pituusmassa eli massa pituusyksikköä kohti
ρ_a	Ilman tiheys
ρ_l	Köysimateriaalin tiheys
σ	Köysimateriaalin vetolujuus
τ	Leijan kahdeksikkoradan vaiheparametri
ϕ	Tuulen suunnan ja leijan paikkavektorin välinen kulma vaakatasossa, esitetty kuvassa 3.1
$\dot{\phi}$	Kulman ϕ aikaderivaatta
A	Leijan siipipinta-ala
a	Köyden vapautusnopeuden optimointiongelman lyhennysmerkintä, määritelmänä (4.33)
b	Köyden vapautusnopeuden optimointiongelman lyhennysmerkintä, määritelmänä (4.32)
C_{\parallel}	Virtaukseen nähden poikittaisen köyden tai sylinterin ilmanvastuskerroin
C_{\perp}	Köydensuuntaisen virtauksen aerodynaaminen kitkakerroin köydelle
C_D	Leijan ilmanvastuskerroin
C_L	Leijan nostovoimakeroin
D	Leijaan kohdistuvan aerodynaamisen voiman ilmapirran suuntainen komponentti eli ilmanvastus
d^{line}	Köyden halkaisija
$\hat{\mathbf{e}}_{\theta}$	Leijan paikallisen koordinaatiston yksikkövektori, määritelmänä (3.3)
$\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$	Leijan paikallisen koordinaatiston yksikkövektori, määritelmänä (3.3)
$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$	Leijan paikkavektorin suuntainen yksikkövektori, määritelmänä (3.3)
F	Lyhennysmerkintä $F = F_{wp}^{\text{gra}} + F_{wp}^{\text{line}}$
\mathbf{F}^{aer}	Leijaan kohdistuva aerodynaaminen voima
$\mathbf{F}_{\mathbf{r}}^{\text{aer}}$	Leijaan kohdistuvan aerodynaamisen voiman paikkavektorin suuntainen komponentti $\mathbf{F}_{\mathbf{r}}^{\text{aer}} = (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}^{\text{aer}})\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = F_r^{\text{aer}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$

F_r^{aer}	Leijaan kohdistuvan aerodynaamisen voiman paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus
\mathbf{F}^{cf}	Leijaan kohdistuva keskipakoisvoima $\mathbf{F}^{\text{cf}} = F^{\text{cf}} \hat{\mathbf{e}}_r$
F^{cf}	Leijaan kohdistuvan keskipakoisvoiman suuruus
F^{gen}	Köyden jännitys maassa kiinnityspisteessään
\mathbf{F}^{gra}	Leijan painovoima
$\mathbf{F}_r^{\text{gra}}$	Leijan painovoiman paikkavektorin suuntainen komponentti $\mathbf{F}_r^{\text{gra}} = (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{F}^{\text{gra}}) \hat{\mathbf{e}}_r = -F_r^{\text{gra}} \hat{\mathbf{e}}_r$
F_r^{gra}	Leijan painovoiman paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus
F_{wp}^{gra}	Leijan painovoiman vektorin $\hat{\mathbf{w}}_p$ suuntainen komponentti $F_{wp}^{\text{gra}} = \mathbf{F}^{\text{gra}} \cdot \hat{\mathbf{w}}_p$
$F_{\parallel}^{\text{laer}}$	Köyteen kohdistuvan aerodynaamisen voiman leijan paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus
$\mathbf{F}_{\perp}^{\text{laer}}$	Köyteen kohdistuvan aerodynaamisen voiman leijan paikkavektoria vastaan kohtisuora komponentti
F^{lcf}	Köyteen kohdistuvan keskipakoisvoiman suuruus
$F_{\parallel}^{\text{lgra}}$	Köyden painovoiman leijan paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus
\mathbf{F}^{line}	Köyden leijaan kohdistama voima
$F_{\text{fric}}^{\text{line}}$	Köyden leijaan kohdistaman voiman köyden ilmanvastuksesta aiheutuva paikkavektoria vastaan kohtisuora komponentti
$\mathbf{F}_r^{\text{line}}$	Köyden leijaan kohdistaman voiman leijan paikkavektorin suuntainen komponentti $\mathbf{F}_r^{\text{line}} = (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{F}^{\text{line}}) \hat{\mathbf{e}}_r = -F_r^{\text{line}} \hat{\mathbf{e}}_r$
F_r^{line}	Köyden leijaan kohdistaman voiman leijan paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus
F_{wp}^{line}	Köyden leijaan kohdistaman voiman vektorin $\hat{\mathbf{w}}_p$ suuntainen komponentti $F_{wp}^{\text{line}} = \mathbf{F}^{\text{line}} \cdot \hat{\mathbf{w}}_p$
$F_{\parallel}^{\text{ten}}$	Köyden jännityksen leijan paikkavektorin suuntainen komponentti
$F_{\text{max}}^{\text{ten}}$	Köyden jännityksen maksimiarvo köyden lujuuutta laskettaessa
f	Lyhennysmerkintä $f = \langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle - \langle F_r^{\text{gra}} \rangle - \langle F_{\parallel}^{\text{lgra}} \rangle + \langle F^{\text{cf}} \rangle + \langle F^{\text{lcf}} \rangle$
G_e	Leijan aerodynaaminen tehokkuus, määritelmänä (3.29)
g	Maan putoamiskiihtyvyyys
$\hat{\mathbf{i}}$	X-akselin suuntainen yksikkövektori, myötätuuleen
$\hat{\mathbf{j}}$	Y-akselin suuntainen yksikkövektori
$\hat{\mathbf{k}}$	Z-akselin suuntainen yksikkövektori, ylöspäin
k_0	Leijavoimalan tehokaavassa (4.30) esiintyvä kerroin, määritelmänä (4.28)

k_0^{\max}	Kerroin k_0 optimaalisella köyden vapautusnopeudella kaavassa (4.40)
k_*	Leijavoimalan tehokaavassa (4.30) esiintyvä kerroin
k_*^{\max}	Kerroin k_* optimaalisella köyden vapautusnopeudella kaavassa (4.40)
L	Leijaan kohdistuvan aerodynaamisen voiman ilmapirtaa vastaan kohtisuora komponentti eli nostovoima
l	Leijan lentoradan yhden kierroksen pituus
\mathbf{M}	Kaavan (3.4) mukainen koordinaatistonmuunnosmatriisi
m	Leijan massa
P	Leijavoimalan mekaaninen teho
$\langle P_{\max} \rangle$	Leijavoimalan keskimääräinen mekaaninen teho sähköntuotantovaiheen aikana optimaalisella köyden vapautusnopeudella
\mathbf{r}	Leijan paikkavektori
$\dot{\mathbf{r}}$	Leijan paikkavektorin aikaderivaatta eli leijan nopeusvektori
$\dot{\mathbf{r}}_{\perp}$	Leijan nopeusvektorin paikkavektoria vastaan kohtisuora projektio $\dot{\mathbf{r}}_{\perp} = \dot{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$
r	Leijan paikkavektorin pituus eli leijan ja köyden kiinnityspisteen välinen etäisyys
r_*	Leijan paikkavektorin keskimääräinen pituus yhden leijan lentämän kierroksen aikana
$\hat{\mathbf{s}}$	Vektoria $\hat{\mathbf{w}}$ vastaan kohtisuora yksikkövektori leijan siivenkärkien tasossa leijasta katsottuna kohti oikeaa siivenkärkeä
$\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{p}}$	Yksikkövektori, määritelmänä $\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$
T	Leijan lentämään kierrokseen kuluva aika
V	Tuulen nopeus skalaarina
V_{\max}	Köyden mitoituksessa käytettävä maksimituulennopeus
V_{\parallel}	Tuulen nopeuden paikkavektorin suuntainen komponentti $V_{\parallel} = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W}$
V_L	Leijan nopeuden paikkavektorin suuntainen komponentti $V_L = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$
V_L^*	Köyden vapautusnopeus eli köyden pituuden aikaderivaatta
V_L^{dzero}	Köyden vapautusnopeus, jolla tehon derivaatta köyden vapautusnopeuden suhteen on nolla
V_L^{opt}	Köyden vapautusnopeuden optimiarvo
v_L	Köyden vapautusnopeuskerroin, määritelmänä (4.26)
v_L^{opt}	Köyden vapautusnopeuskertoimen optimiarvo
\mathbf{W}	Tuulen nopeusvektori
\mathbf{W}_{\parallel}	Tuulen nopeusvektorin leijan paikkavektorin suuntainen projektio $\mathbf{W}_{\parallel} = (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W})\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$

\mathbf{W}_\perp	Tuulen nopeusvektorin leijan paikkavektoria vastaan kohtisuora projek- tio $\mathbf{W}_\perp = \mathbf{W} - \mathbf{W}_\parallel$
\mathbf{W}_e	Efektiivinen tuulivektori $\mathbf{W}_e = \mathbf{W} - \dot{\mathbf{r}}$ eli ilmavirtaus leijassa
$\mathbf{W}_e^\parallel(x)$	Köydenpätjän efektiivisen tuulen köydensuuntainen projektiio pituus- koordinaatin x funktiona
$\mathbf{W}_e^\perp(x)$	Köydenpätjän efektiivisen tuulen köyttä vastaan kohtisuora projektiio pituuskoordinaatin x funktiona
\mathbf{W}_e^p	Vektorin \mathbf{W}_e projektiio vektorien $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ja $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ virittämälle tasolle $\mathbf{W}_e^p = \mathbf{W}_e - (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{W}_e)\hat{\mathbf{e}}_r$
$\hat{\mathbf{w}}$	Efektiivisen tuulivektorin suuntainen yksikkövektori, ilmavirran suun- taan leijassa
$\hat{\mathbf{w}}_p$	Vektorin \mathbf{W}_e^p suuntainen yksikkövektori
x	Leijan paikkavektorin suuntainen pituusmuuttuja, joka on nolla köyden kiinnityspisteessä ja kasvaa arvoon r leijan kohdalla

1. JOHDANTO

Sähköenergian riittävä saatavuus ja kohtuullinen hinta ovat nykyaikaisen yhteiskunnan toiminnan perusedellytyksiä. Nykyinen sähköntuotanto perustuu kuitenkin suurelta osin uusiutumattomiin energianlähteisiin, joiden saanti alkaa ennemmin tai myöhemmin vaikeutua ja samalla hinta nousee. Toisaalta hiilidioksidipäästöt ja ilmaston lämpeneminen huolestuttavat aina vain enemmän. Sähkön ja yleensäkin energian tuotannon jatkuvuuden turvaamiseksi ja energian hinnan pitämiseksi kohtuullisena täytyy uusiutuvien ja päästöttömien energianlähteiden osuutta energiantuotannossa pikaisesti nostaa. Tämän tavoitteen toteuttamiseksi on tärkeää tutkia ja kehittää nykyisten uusiutuvan energian tuotantotapojen lisäksi aivan uusia tapoja tuottaa energiaa ympäristöä saastuttamatta.

Tuuli on yksi merkittävimmistä ja houkuttelevimmista uusiutuvan energian lähteistä, mutta valitettavasti tuulen sisältämästä energiasta voidaan nykyisillä tuulivoimaloilla käyttää hyväksi vain pieni osa. Nykyisiä maston päässä olevaan generaattoriin ja sitä pyörittävään roottoriin perustuvia tuulivoimaloita ei enää voida kehittää merkittävästi suuremmiksi, korkeammiksi ja näin tehokkaammiksi, sillä rakenteiden kestävyysrajat tulevat välttämättä vastaan. Näin ollen nykyisillä menetelmillä voidaan tuulesta hyödyntää energiantuotannossa vain maanpinnan lähellä olevaa osuutta. Maanpinnan aiheuttama aerodynaaminen vastus hidastaa kuitenkin merkittävästi ilmapirtauksia pinnan lähellä tuulisimmillakin alueilla kuten merellä ja tekee tuulisähkön tuottamisen kannattamattomaksi lähes kaikkialla sisämaassa.

Esimerkiksi katselemalla tuulivoimaloiden yli vauhdikkaasti lipuvia pilviä voi konkreettisesti huomata, kuinka paljon käyttökelpoista uusiutuvaa ja saasteetonta energiaa virtaa vapaana tuulivoimaloiden saavuttamattomissa. Korkeuksissa puhaltavien voimakkaiden tuulien hyödyntämistä onkin yritetty monilla erilaisilla tavoilla, mutta toistaiseksi mitään niistä ei ole saatu toimimaan käytännössä. Monien muiden ideoiden tavoin 1970-luvun lopun öljykriisin aikoihin nousi esille ajatus leijojen käyttämisestä energiantuotannossa, mutta öljyn hinnan taas laskiessa leijavoimaloiden tutkimus loppui lyhyeen ja jäljelle jäi vain muutama leijavoimaloita käsittelevä julkaisu, joista M. Loydin julkaisu [1] on tämänkin työn pohjana. Julkaisussaan Loyd esittelee tässä työssä käsiteltävän leijavoimalatyyppin perusidean sekä joitakin leijan liikkumiseen ja leijavoimalan tehoon liittyviä tuloksia, jotka ovat yksinkertaistettuja versioita tässä työssä johdettavista keskeisistä tuloksista. Näin Loyd tuo ilmi

leijavoimalan tarjoaman houkuttelevan mahdollisuuden kerätä ja hyödyntää korkealla puhaltavien voimakkaiden tuulien sisältämää energiaa tehokkaasti suuren ja nopeasti lentävän leijan avulla.

Nyt 2000-luvulla ajatus tuulienergian hyödyntämisestä leijojen avulla on noussut uudelleen esille muutamassa tutkimusryhmässä, ja tällä kertaa näkymät ovat niin lupaavia, että kaikki nämä ryhmät ovat jatkaneet innostuneina tutkimuksiaan useamman vuoden ajan. Esimerkiksi kevyiden ja lujien leija- ja köysimateriaalien kehitys, varjoliitimien ja vetoleijojen yleistyminen harrastusvälineinä sekä tietotekniikan kehittymisen mahdollistama reaaliaikainen optimointi ja automaattinen kauko-ohjaus ovat nostaneet leijavoimalan ehkäpä kaikkein lupaavimmaksi korkealla puhaltavien tuulien hyödyntämiskeinoksi. Vetoleijoja käyttäviä toimivia leijavoimalaprototyyppejäkin on jo rakennettu ainakin Alankomaissa Laddermill-projektissa sekä Italiassa KiteGen-projektissa, joten leijavoimalan toteuttamiskelpoisuudestakin on jo todisteita ainakin pienessä mittakaavassa. Prototyypeistä julkaisuissa [2] ja [3] esitelty KiteGen-prototyyppi vastaa toimintaperiaatteeltaan tässä työssä käsiteltävää leijavoimalaa, ja nämä julkaisut sisältävät myös tietokonesimulaatioista saatuja tehoarvioita.

Tässä työssä tarkoituksena on johtaa mahdollisimman yksinkertainen laskukaava leijavoimalan teholle leijan ja köyden voimatasapainoa tarkastelemalla. Tarkoituksena on siis johtaa kaava, jolla voidaan laskea arvio leijavoimalan keskimääräiselle teholle ilman tietokonesimulaatioita tai kokeita. Tässä työssä johdettavan tehokaavan on ensimmäisenä johtanut I. Argatov, jonka kesällä 2007 tekemiä laskelmia esitykseni seurailee. Argatovin laskelmat löytyvät alkuperäisessä muodossaan julkaisua odottavasta artikkelista [4]. Tehtäväni oli ensin tarkistaa artikkelin [4] kaavat johtamalla kaavat uudelleen artikkelissa olevien välivaiheiden avulla, ja tämä työ sai alkunsa tarpeesta esittää laskelmat uudelleen suomeksi ja mahdollisimman selkeästi, jotta laskelmien tarkasteleminen olisi mahdollisimman helppoa.

Näin ollen olen esittänyt huomattavasti alkuperäistä esitystä enemmän välivaiheita, jotka perustuvat tekemiini tarkistuslaskelmiin. Lisäksi olen yrittänyt tuoda selkeästi esille laskelmissa tehdyt monet approksimoinnit perusteluineen, jotta arviointien merkitystä voisi jatkossa tarkastella helpommin. Erityisesti olen käsitellyt keskiarvoja alkuperäistä esitystä tarkemmin ja erotellut keskimääräiset suuret hetkellisistä arvoista, jotta suureiden keskimääräistykseen liittyvät monet arviointit tulisivat selkeästi esille. Olen myös yrittänyt selkeyttää merkintöjä ja lyhentää esitystä jättämällä pois tehokaavan johtamiseen liittymättömät osuudet.

Työn alussa esittelen lyhyesti työssä käsiteltävän leijavoimalatyyppin toimintaperiaatteen, jotta kaavoja johdettaessa tehtyjen oletusten perusteet voisi ymmärtää. Varsinainen kaavojen johtamisosio alkaa kaavojen johtamisessa käytettävien koordinaattistojen ja käsitteiden määrittelyillä, jotta kaikki kaavojen johtamisen seura-

miseen tarvittava tieto olisi mukana työssä. Alun määritelmät vastaavat artikkelin [4] määritelmiä, mutta olen yrittänyt esittää ne tarkemmin ja selkeämmin. Varsinaisista tuloksista ensimmäisenä johdetaan köyden ilmanvastuksen huomioiva kaava leijan keskimääräiselle lentonopeudelle tarkastelemalla leijan voimatasapainoa leijan paikkavektoria vastaan kohtisuorassa suunnassa. Sitten päästäänkin jo leijavoimalan tehoarvion johtamiseen, jossa ensin ratkaistaan köyden jännityksen muutos köyden matkalla ja köyden jännitys leijan päässä tarkastelemalla leijan paikkavektorin suuntaista voimatasapainoa. Köyden voimien tarkastelussa olen ottanut mukaan artikkelin [4] esityksestä puuttuneen köyden keskipakoisvoimatermin ja muutenkin olen käsitellyt tarkemmin tehoarvion kannalta oleelliset köydensuuntaiset voimat ja jättänyt pois köyteen vaikuttavien sivuttaisvoimien tarkastelun. Seuraavaksi johdetaan arviot tehoon vaikuttavien voimien keskimääräisille suuruuksille, ja näin päästään muotoilemaan arvio leijavoimalan keskiteholle. Erona artikkelin [4] esitykseen olen siirtänyt köyden vapautusnopeuden optimoinnin viimeiseksi, jolloin olen voinut esittää tehokaavan erilaisilla köyden vapautusnopeuksilla. Optimaalisen köyden vapautusnopeuden ratkaisemisen jälkeen tämän työn lopputuloksena saadaan leijavoimalan teholle arvio, joka on köyden keskipakoisvoimatermiä lukuun ottamatta sama kuin artikkelissa [4] johdettu kaava. Tarkoituksenaahan on esittää uudelleen artikkelin [4] laskelmat ja päätyä samanlaisiin tuloksiin.

Viimeisenä osiona on esimerkki tehokaavan käyttämisestä leijavoimalan tehon laskemiseen. Esimerkkilaskun suureiden arvot olen poiminut KiteGen-projektin julkaisussa [3] esitetystä KiteGen-prototyypin simulaatiosta, joten samalla päästään vertaamaan tehokaavan antamaa tehoa julkaisussa oleviin simulaation tuloksena saattuihin teholukemiin. KiteGen-prototyypin simulaatiossa käytetty köyden vapautusnopeus eroaa huomattavasti artikkelissa [4] käytetystä optimiarvosta, joten tulosten tarkkaan vertaamiseen tarvitaan johtamaani erilaisille köyden vapautusnopeuksille yleistettyä tehokaavaa.

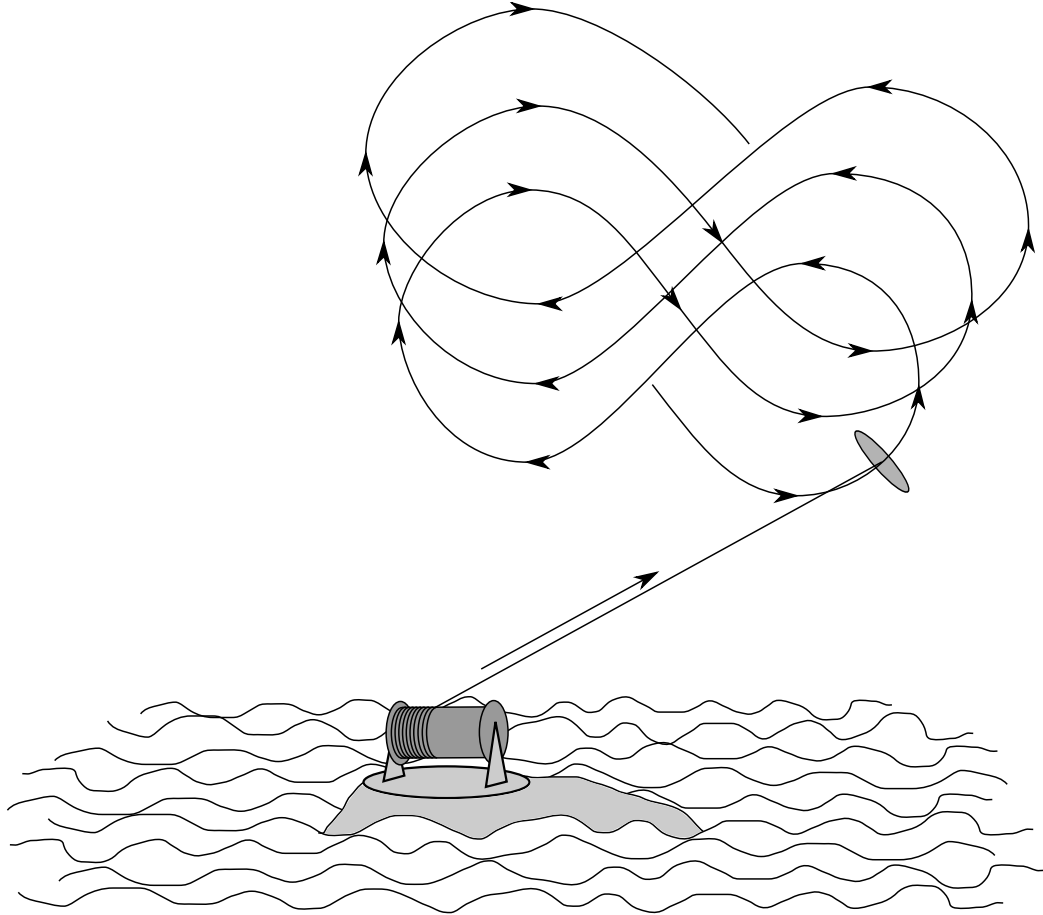
2. LEIJAVOIMALAN TOIMINTAPERIAATE

Leijavoimala on sähköä tuottava tuulivoimala, jossa tuulienergiaa kerätään leijaa lennättämällä. Leijavoimaloista puhuttaessa oletetaan siis, että leijan keräämä mekaaninen energia muunnetaan sähköenergiaksi generaattorissa. Toki leijalla kerättyä energiaa voi käyttää suoremmin mekaanisesti esimerkiksi veden pumppaamiseen tai laivan vetämiseen, mutta tällöin kyse on paremminkin leijamoottorista tai leijan käyttämisestä purjeena. Tässä työssä keskitytään kuitenkin sähkön tuottamiseen leijan avulla eli siis leijavoimaloihin, sillä sähkön käyttömahdollisuudet ovat kaikkein monipuolisimmat ja sähköstä on tullut nykyaikaisen elämän perusedellytyksiä. Tässä työssä ei kuitenkaan käsitellä leijavoimalan generaattorin sähköisiä ominaisuuksia, vaan leijan lentoa ja leijan tuottamaa mekaanista tehoa, joten tämän työn tuloksia voi käyttää minkä tahansa muunkin leijalla kerättyä energiaa hyödyntävän systeemin tehoarviona, kunhan tehokaavaa johdettaessa tehdyt leijaan ja köyteen liittyvät oletukset toteutuvat.

Tässä työssä käsitellään kuvassa 2.1 esitettyä leijavoimalatyyppeä, jossa on vain yksi leija kiinnitettynä yhdellä köydellä generaattorin sisältävään maa-asemaan. Perusoletuksina generaattori on siis maan pinnalla ja leijaa ohjataan kauko-ohjatuilla leijaan sijoitetuilla ohjaussysteemeillä eikä useamman köyden avulla. Lisäksi oletetaan, että leijaa lennätetään aina myötätuuleen eli suurimman tehon antavalla suunnalla. Leijan lentosuunnan kääntäminen tuulen mukaan voidaan toteuttaa rakentamalla maa-asema pyörivälle alustalle tai sijoittamalla köyden ulostuloaukko maa-aseman päälle.

Kyseisen leijavoimalatyypin sähköntuotanto perustuu kaksivaiheiseen sykliin, jonka vaiheet ovat sähköntuotantovaihe ja paluuvaihe. Sähköntuotantovaiheessa leija vetää generaattoria pyörittävän rummun ympärille kelattua köyttä mahdollisimman suurella voimalla ulos maa-asemasta, jolloin generaattori tuottaa pyöriessään sähköä. Paluuvaiheessa puolestaan leijan vetovoima minimoidaan ja köysi kelataan takaisin rummun ympärille käyttämällä generaattoria moottorina. Paluuvaiheessa menetetään osa sähköntuotantovaiheessa tuotetusta energiasta, mutta paluuvaiheessa menetettävä energia voidaan minimoida leijan rakennetta ja lentorataa optimoimalla.

Sähköntuotantovaiheessa leijan vetovoima voidaan maksimoida lennättämällä leijaa makaavan kahdeksikon muotoisella silmukkaradalla moninkertaisella tuulenno-



Kuva 2.1: Periaatekuva tässä työssä käsiteltävästä leijavoimalasta sähköntuotantovaiheessa. Leijan lentorata on piirretty kolmen makaavan kahdeksikon ajalta, mutta kahdeksikkoja voidaan kiertää peräkkäin moninkertainen määrä. Kuvan lentorata on vai tyypillinen esimerkki, sillä lentoradan voi valita vapaasti reaaliaikaisen optimoinnin ohjaamana.

peudella. Tällöin automaattinen ohjaus pitää leijan optimaalisella lentoradalla, ja leija kerää tehokkaasti energiaa korkealla puhaltavasta huomattavasti maanpinnan tuulia voimakkaammasta ja tasaisemmasta tuulesta, sillä suurella nopeudella lentäessään leija saa käyttöönsä tuulen energian laajalta poikkipinta-alalta. Suuren ilmanopeuden ansiosta aerodynaamiset voimat ovat vahvoja ja näin köyteen kohdistuu suuri vetovoima generaattorille välitettäväksi. Tässä vaiheessa leijan liitoluvun, eli nostovoiman ja ilmanvastuksen suhteen, pitäisi olla mahdollisimman suuri, jotta leija lentäisi mahdollisimman nopeasti ja kehittäisi mahdollisimman suuren tehon. Tässä työssä tarkastellaan sähköntuotantovaihetta olettaen, että leija lentää mahdollisimman nopeasti. Näin leijan nostovoiman oletetaan olevan vähintään joitakin kertoja ilmanvastusta suurempi, ja leijan lentoradan oletetaan sijaitsevan tehokkaalla alueella eli jossakin myötätuulen suunnassa. Radan muoto ei ole tämän työn tarkastelujen kannalta oleellinen asia, mutta käytännössä makaavan kahdeksikon muotoinen rata on yksinkertaisin toimiva köyttä kiertämätön rata. Leijan tyypilläkään

ei ole merkitystä, sillä leijaa mallinnetaan leijan keskeisiä ominaisuuksia kuvaavien suureiden avulla.

Paluuvaiheessa leijan voi esimerkiksi ohjata maa-aseman yläpuolelle tasapainoasemaan köyden takaisin kelaamisen ajaksi. Tällöin suunnilleen paikallaan pysyvän leijan ilmanopeus on lähellä tuulen nopeutta, ja pienen ilmanopeuden ansiosta aerodynaamiset voimat ovat huomattavasti pienempiä kuin sähköntuotantovaiheessa. Näin pystyyn nostetun köyden voi tiputtaa maa-aseman sisälle osittain köyden painovoiman avustamana menettämättä merkittävää energiamäärää paluuvaiheessa. Paluuvaiheen energiahäviöön ja nopeuteen vaikuttaa kuitenkin niin moni asia, ettei paluuvaiheen tarkasteleminen yleisessä leijavoimalan tehoarviossa ole käytännössä mahdollista ottamatta huomioon leijavoimalan toteutukseen liittyviä yksityiskoh-
tia. Näin ollen tässä työssä ei käsitellä paluuvaihetta tehoarvion yleiskäyttöisyyden säilyttämiseksi, vaan johdetaan arvio sähköntuotantovaiheen aikaiselle keskimääräiselle teholle. Lisäksi keskitehoa tarkastellaan vain yhden leijan lentämän kahdeksikon ajalta, sillä köyden pidentyessä sähköntuotantovaiheen aikana leijavoimalan teho muuttuu lentoradan muuttuessa.

Tässä leijavoimalatyypissä leijan lentorataa voidaan jatkuvasti optimoida vaihtelevissa olosuhteissa, jotta sähköntuotanto olisi tehokasta ja leija pysyisi hallitusti ilmassa. Ensinnäkin leijan lentosuuntaa voidaan kääntää tuulen suunnan mukaan. Leijan lentokorkeutta voidaan optimoida tuulen mukaan vaihtelemalla köyden pituutta ja korkeuskulmaa. Luonnollisesti myös leijan tekemien silmukoiden laajuutta ja muotoa voidaan optimoida olosuhteiden mukaan. Kun lisäksi köyden pituuden vaihtelu ja näin sähköntuotanto- ja paluuvaiheiden kestot ovat varsin vapaasti säädettävissä, voidaan leijavoimalan sähköntuotanto optimoida hyvinkin erilaisissa olosuhteissa älykkään ohjausjärjestelmän avulla. Lisäksi useampi leijavoimala voidaan synkronoida toimimaan tahdissa niin, että paluuvaiheet ovat peräkkäin ja koko ryp-
pään sähköntuotto on tasaista. Tässä työssä tarkoituksena on kuitenkin tehoarvion johtaminen, joten tehon optimointia vaihtelevissa olosuhteissa ei tarkastella.

3. LEIJAN NOPEUSLAIN JOHTAMINEN

3.1 Teorian perusteet

3.1.1 Koordinaatistojen määrittely

Oletetaan tuulen nopeuden pystysuuntainen komponentti nolllaksi ja sijoitetaan leijavoimalaan oikeakätinen karteesisen koordinaatisto siten, että x-akseli on aina tuulen nopeuden suuntainen ja z-akseli on ylöspäin. Olkoon tämän karteesisen koordinaatiston yksikkövektorit x-, y-, ja z-akseleille $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ ja $\hat{\mathbf{k}}$. Näin tuulen nopeusvektorille \mathbf{W} saadaan esitys

$$\mathbf{W} = V\hat{\mathbf{i}}, \quad (3.1)$$

missä V on skalaarinen tuulen nopeus.

Otetaan lisäksi käyttöön pallokoordinaatit r , θ , ϕ siten, että leijan paikkavektori \mathbf{r} karteesisessä koordinaatistossa on

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.2)$$

Tässä määrittelyssä r on leijan etäisyys origosta, θ on pystysuoran ja paikkavektorin välinen kulma ja ϕ on vaakatasossa tuulen suunnan ja leijan välinen kulma, joka on positiivinen vastapäivään voimalasta katsottuna.

Tässä pallokoordinaatistossa saadaan paikalliset yksikkövektorit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}, \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}} \quad \text{ja} \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin \phi \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

derivoimalla paikkavektori kunkin koordinaatin suhteen ja normeeraamalla. Yksikkövektorit $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ja $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ ovat ortonormaalit ja muodostavat leijaan oikeakätisen koordinaatiston. Tämän koordinaatiston yksikkövektorit karteesisissa koordinaateissa esitettävä koordinaatistonmuunnosmatriisi

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

on siis ortogonaalinen ja käänteismatriisiksi saadaan $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^\top$.

Näin tuulenoisuusvektorille (3.1) saadaan esitykseksi vektoreiden $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ja $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ muodostamassa kannassa

$$\mathbf{W} = \mathbf{M}^\top \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} = V \left(\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \right). \quad (3.5)$$

Leijan painovoimalle $\mathbf{F}^{\text{gra}} = -mg \hat{\mathbf{k}}$ saadaan vastaavasti esitys

$$\mathbf{F}^{\text{gra}} = \mathbf{M}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = -mg \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = -mg \left(\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \right), \quad (3.6)$$

missä g on maan putoamiskiiktyvyys skalaarina ja m on leijan massa.

3.1.2 Efektiivinen tuuli ja aerodynaaminen voima

Määritellään seuraavaksi efektiivinen tuulivektori

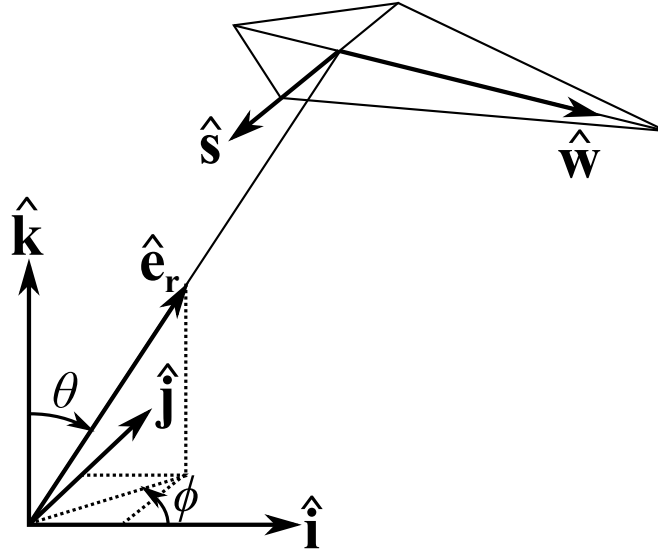
$$\mathbf{W}_e = \mathbf{W} - \dot{\mathbf{r}}, \quad (3.7)$$

joka kertoo ilmavirtauksen leijasta katsottuna ja määrää näin leijaan kohdistuvat aerodynaamiset voimat. Tässä $\dot{\mathbf{r}}$ on leijan paikkavektorin aikaderivaatta eli leijan nopeusvektori. Olkoon $\hat{\mathbf{w}}$ efektiivisen tuulivektorin suuntainen yksikkövektori, eli

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{W}_e}{\|\mathbf{W}_e\|}. \quad (3.8)$$

Otetaan vielä käyttöön yksikkövektori $\hat{\mathbf{s}}$, joka on kohtisuorassa ilmavirtaa eli vektoria $\hat{\mathbf{w}}$ vastaan ja osoittaa leijasta käsin tarkasteltuna kohti leijan oikeaa siivenkärkeä niin, että leijan siivenkärkien kautta kulkeva suora on vektoreiden $\hat{\mathbf{w}}$ ja $\hat{\mathbf{s}}$ määräämän tason suuntainen. Siis jos leijana olisi lentokone, jonka runko on ilmavirtauksen suuntainen, osoittaisi $\hat{\mathbf{w}}$ taaksepäin ilmanvastuksen suuntaan, $\hat{\mathbf{s}}$ vasemmasta siivenkärjestä kohti oikeaa siivenkärkeä ja $\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{s}}$ ylöspäin nostovoiman suuntaan lentäjän paikalta tarkasteltuna. Yksikkövektorit $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{w}}$ ja $\hat{\mathbf{s}}$ sekä kulmat θ ja ϕ on havainnollistettu kuvassa 3.1, jossa leija on ilmavirtauksen suuntainen ja sitä katsellaan alaviistosta.

Otetaan leijallakin käyttöön lentokoneista tuttu aerodynaamisen voiman jako komponentteihin, jotka ovat nostovoima, ilmanvastus ja sivuttaisvoima. Näistä ilmanvastus D määritellään ilmavirran suuntaiseksi komponentiksi ja nostovoima L ilmavirtaa sekä siivenkärkien kautta kulkevaa suoraa vastaan kohtisuoraksi kompo-



Kuva 3.1: Yksikkövektoreita ja kulmia havainnollistettuna.

mentiksi. Näin ilmanvastus on vektorin $\hat{\mathbf{w}}$ suuntaan ja nostovoima vektorin $\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{s}}$ suuntaan. Sivuttaisvoima puolestaan on vektorin $\hat{\mathbf{s}}$ suuntaan, mutta sillä ei ole merkitystä teholaskelmien kannalta, joten jätetään se huomioimatta. Näin leijaan kohdistuvalle aerodynaamiselle voimalle \mathbf{F}^{aer} saadaan esitys

$$\mathbf{F}^{\text{aer}} = L(\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{s}}) + D \hat{\mathbf{w}}, \quad (3.9)$$

missä nostovoima ja ilmanvastus lasketaan yleisesti käytössä olevilla esimerkiksi aerodynamiikkakirjassa [5] esitetyillä kaavoilla

$$L = \frac{1}{2} \rho_a A C_L \|\mathbf{W}_e\|^2 \quad \text{ja} \quad D = \frac{1}{2} \rho_a A C_D \|\mathbf{W}_e\|^2. \quad (3.10)$$

Kaavoissa ρ_a on ilman tiheys, A leijan siipipinta-ala, C_L leijan nostovoimakerroin ja C_D leijan ilmanvastuskerroin. Leijan kohtauskulma, eli leijan siiven kulma ilmapirtaan nähden vaikuttaa nostovoima- ja ilmanvastuskertoimeen, mutta jatkossa kertoimia käsitellään leijalle ominaisina vakioina.

Jatkossa käsitellään efektiivistä tuulta ja leijan liikettä vektoreiden $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ja $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ virittämässä tasossa, joten määritellään joitakin jatkossa tarpeellisia tässä tasossa olevia vektoreita. Olkoon \mathbf{W}_e^{p} efektiivisen tuulivektorin \mathbf{W}_e projektio vektorien $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ja $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ virittämälle tasolle, eli

$$\mathbf{W}_e^{\text{p}} = \mathbf{W}_e - (\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{W}_e) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (3.11)$$

ja olkoon vastaava yksikkövektori

$$\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|}. \quad (3.12)$$

Näin vektorit $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ ja $\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$ ovat kohtisuorassa ja voimme määritellä kolmannen yksikkövektorin

$$\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}, \quad (3.13)$$

joka on kohtisuorassa edellisiä vastaan ja täydentää näin vektoreiden $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$ ja $\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{p}}$ muodostaman oikeakätisen ortogonaalisen kannan. Kannattaa huomata, että vektorin $\hat{\mathbf{s}}$ projektio vektorien $\hat{\mathbf{e}}_{\theta}$ ja $\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$ virittämälle tasolle ei yleisessä tapauksessa ole vektorin $\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{p}}$ suuntainen.

3.2 Leijan sivuttaisliike

3.2.1 Sivuttaisliikkeen geometriaa

Käsitellään nyt tapausta, jossa leijan siivenkärkien kautta kulkeva suora on kohtisuorassa paikkavektoria vastaan, eli $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = 0$. Toisin sanoen leijaa ei ole kallistettu leijan ohjaamiseksi. Tällöin vektori $\hat{\mathbf{s}}$ on vektorien $\hat{\mathbf{e}}_{\theta}$ ja $\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$ virittämässä tasossa ja lisäksi saadaan

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}} &\stackrel{(3.12)}{=} \hat{\mathbf{s}} \cdot \frac{\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}}{\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|} \stackrel{(3.11)}{=} \frac{1}{\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|} \left(\hat{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{W}_{\mathbf{e}} - (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{e}}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}) \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|} \left(\underbrace{(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{e}})}_0 - (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{e}}) \underbrace{(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}})}_0 \right) = 0, \end{aligned}$$

joten tässä tapauksessa $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{p}} \stackrel{(3.13)}{=} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$. Vektorien $\hat{\mathbf{s}}$ ja $\mathbf{W}_{\mathbf{e}}$ pistetulo on nolla, sillä vektori $\hat{\mathbf{s}}$ on määritelty kohtisuoraksi ilmavirtaa eli vektoria $\mathbf{W}_{\mathbf{e}}$ vastaan.

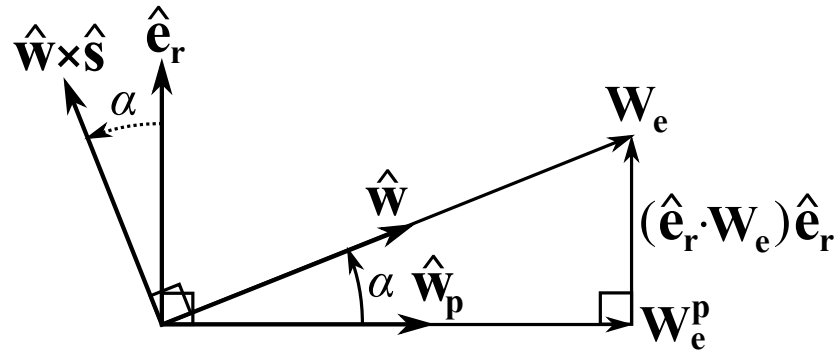
Näin vektorit $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{w}}$, $\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$ ja $\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{s}}$ ovat kaikki samassa tasossa. Olkoon nyt kulma α vektorien $\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$ ja $\hat{\mathbf{w}}$ välinen kulma, ja tarkastellaan tilannetta kuvassa 3.2.

Kuvasta 3.2 nähdään hyödylliset esitykset kulman α sinille ja kosinille:

$$\sin \alpha = \frac{\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{e}}}{\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}\|} \quad \text{ja} \quad \cos \alpha = \frac{\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|}{\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}\|}. \quad (3.14)$$

Määritellään nyt paikkavektorin \mathbf{r} suuntaiset komponentit V_{\parallel} tuulen nopeudelle ja V_L leijan nopeudelle, eli määritellään

$$V_{\parallel} = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W} \quad \text{ja} \quad V_L = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (3.15)$$



Kuva 3.2: Piirros samassa tasossa olevista vektoreista.

Näillä määrittelyillä saadaan kaavoille (3.14) muoto

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{W}_e \stackrel{(3.7)}{=} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\mathbf{W} - \dot{\mathbf{r}}) \stackrel{(3.15)}{=} V_{\parallel} - V_L, \quad \sin \alpha = \frac{V_{\parallel} - V_L}{\|\mathbf{W}_e\|} \quad \text{ja} \quad \tan \alpha = \frac{V_{\parallel} - V_L}{\|\mathbf{W}_e^p\|}. \quad (3.16)$$

Jos oletetaan leijan köysi suoraksi, venymättömäksi ja leijan paikkavektorin \mathbf{r} suuntaiseksi, on V_L köyden vapautusnopeus maassa ja V_{\parallel} tuulenopeuden köydensuuntainen komponentti.

Kuvasta 3.2 nähdään myös kantavektorien $\hat{\mathbf{w}}$ ja $\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{s}}$ esitykset vektorien $\hat{\mathbf{w}}_p$ ja $\hat{\mathbf{e}}_r$ avulla:

$$\hat{\mathbf{w}} = \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \alpha \hat{\mathbf{w}}_p \quad \text{ja} \quad \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{s}} = \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \alpha \hat{\mathbf{w}}_p. \quad (3.17)$$

Näin kaavasta (3.9) saadaan aerodynaamisen voiman \mathbf{F}^{aer} esitys vektorien $\hat{\mathbf{w}}_p$ ja $\hat{\mathbf{e}}_r$ avulla

$$\mathbf{F}^{\text{aer}} = (-L \sin \alpha + D \cos \alpha) \hat{\mathbf{w}}_p + (L \cos \alpha + D \sin \alpha) \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (3.18)$$

3.2.2 Paikkavektoria vastaan kohtisuora voimatasapaino

Tarkastellaan nyt leijan liikkumista paikkavektoria vastaan kohtisuoraan ja johdetaan lauseke vektorin \mathbf{W}_e^p pituudelle tarkastelemalla voimatasapainoa tämän vektorin eli vektorin $\hat{\mathbf{w}}_p$ suunnassa. Aerodynaamisen voiman vektorin $\hat{\mathbf{w}}_p$ suuntainen komponentti saadaan kaavasta (3.18), ja tämän lisäksi vektorin $\hat{\mathbf{w}}_p$ suunnassa leijaan vaikuttaa leijan painovoiman komponentti $F_{wp}^{\text{gra}} = \mathbf{F}^{\text{gra}} \cdot \hat{\mathbf{w}}_p$. Myös köysi on todellisuudessa ainakin hieman kaareva ja leijan päässä köyden jännityksellä on näin myös paikkavektoria vastaan kohtisuora komponentti, jonka vektorin $\hat{\mathbf{w}}_p$ suuntainen osuus on $F_{wp}^{\text{line}} = \mathbf{F}^{\text{line}} \cdot \hat{\mathbf{w}}_p$.

Kun jätetään leijan massahitaus huomioimatta, voimatasapainoyhtälöksi vektorin

$\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$ suunnassa saadaan

$$-L \sin \alpha + D \cos \alpha + F_{wp}^{\text{gra}} + F_{wp}^{\text{line}} = 0. \quad (3.19)$$

Otetaan nyt käyttöön lyhennysmerkintä

$$F = F_{wp}^{\text{gra}} + F_{wp}^{\text{line}}, \quad (3.20)$$

jolloin voimatasapainon (3.19) mukaan

$$F = L \sin \alpha - D \cos \alpha. \quad (3.21)$$

Ratkaistaan yhtälöstä (3.21) $\tan \alpha$ voimakomponenttien L , D ja F avulla lausuttuna muotoilemalla yhtälö ensin toisen asteen yhtälöksi muuttujan $\tan \alpha$ suhteen. Lähdetään liikkeelle yhtälön (3.21) muodosta

$$L \sin \alpha = D \cos \alpha + F,$$

korotetaan yhtälö puolittain neliöön muotoon

$$L^2 \sin^2 \alpha = D^2 \cos^2 \alpha + 2DF \cos \alpha + F^2$$

ja jaetaan puolittain lausekkeella $\cos^2 \alpha$, jolloin saadaan

$$L^2 \tan^2 \alpha = D^2 + \frac{2DF}{\cos \alpha} + \frac{F^2}{\cos^2 \alpha}.$$

Jatketaan lausekkeen muokkaamista sijoittamalla F yhtälöstä (3.21) sekä $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} L^2 \tan^2 \alpha &= D^2 + \frac{2D}{\cos \alpha} (L \sin \alpha - D \cos \alpha) + \frac{F^2 \cos^2 \alpha + F^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= D^2 + 2LD \tan \alpha - 2D^2 + F^2 + F^2 \tan^2 \alpha, \end{aligned}$$

joten toisen asteen yhtälöksi saadaan

$$(L^2 - F^2) \tan^2 \alpha - 2LD \tan \alpha + D^2 - F^2 = 0. \quad (3.22)$$

Yhtälölle (3.22) saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ratkaisuiksi

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{-(-2LD) \pm \sqrt{(-2LD)^2 - 4(L^2 - F^2)(D^2 - F^2)}}{2(L^2 - F^2)} \\ &= \frac{2LD \pm \sqrt{4F^2(L^2 + D^2 - F^2)}}{2(L^2 - F^2)} = \frac{LD \pm LF\sqrt{1 + \frac{D^2}{L^2} - \frac{F^2}{L^2}}}{L^2 - F^2}.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Tehokkaasti toimivassa leijavoimalassa leijan nostovoimakomponentin L pitäisi olla paljon ilmanvastuskomponenttia D ja kaavan (3.20) mukaista muiden voimien osuutta F suurempi, joten yksinkertaistetaan tulosta (3.23) oletuksilla

$$|L| \gg |D| \text{ ja } |L| \gg |F|, \text{ eli myös } \left| \frac{D}{L} \right| \ll 1 \text{ ja } \left| \frac{F}{L} \right| \ll 1 \quad (3.24)$$

likimääräiseen muotoon

$$\tan \alpha = \frac{LD \pm LF\sqrt{1 + \frac{D^2}{L^2} - \frac{F^2}{L^2}}}{L^2 - F^2} \approx \frac{LD \pm LF}{L^2 - F^2} \approx \frac{LD \pm LF}{L^2} = \frac{D}{L} \pm \frac{F}{L}.\quad (3.25)$$

Koska alkuperäinen yhtälö (3.21) saadaan muotoon $\tan \alpha = \frac{D}{L} + \frac{F}{L \cos \alpha}$ jakamalla puolittain lausekkeella $L \cos \alpha$, pitää kaavan (3.25) kahdesta merkkivaihtoehdosta valita plusmerkki, ja näin tulokseksi saadaan

$$\tan \alpha \approx \frac{D}{L} + \frac{F}{L}.\quad (3.26)$$

3.2.3 Sivuttaisliikkeen nopeus ja aerodynaaminen tehokkuus

Yhtälöistä (3.16) ja (3.26) saadaan leijan ilmanopeuden paikkavektoria vastaan kohtisuoran komponentin suuruudeksi

$$\|\mathbf{W}_e^p\| \approx (V_{\parallel} - V_L) \frac{L}{D + F} \stackrel{(3.20)}{=} (V_{\parallel} - V_L) \frac{L}{D + F_{wp}^{gra} + F_{wp}^{line}}.\quad (3.27)$$

Tätä kaavaa voidaan kutsua leijan hetkelliseksi nopeuslaiksi, sillä kaava kertoo käytännössä leijan ilmanopeuden. Leijan paikkavektorin suuntainen nopeuskomponenttihan tiedetään tuulen ja köyden pituuden muutosnopeuden avulla, sillä kaavan (3.16) mukaan paikkavektorin suuntainen skalaarikomponentti $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{W}_e$ on $V_{\parallel} - V_L$. Leijavoimalan tapauksessa $\|\mathbf{W}_e^p\|$ on yleensä moninkertainen tuulennopeuteen verrattuna, joten $\|\mathbf{W}_e^p\|$ on varsin lähellä leijan sivuttaisliikkeen vauhtia maasta leijan kiinnityspisteestä tarkasteltuna. Leija liikkuu siis köyttä vastaan kohtisuoraan suunnilleen kertoimen $\frac{L}{D + F_{wp}^{gra} + F_{wp}^{line}}$ verran köydensuuntaista efektiivistä tuulennopeutta nopeammin.

Leijavoimalan keskimääräisen tehon kaavaa johdettaessa kiinnostava suure on kuitenkin $\|\mathbf{W}_e^p\|$:n keskimääräinen arvo $\langle\|\mathbf{W}_e^p\|\rangle$ yhden kierroksen ajalta leijan kiertäessä makaavan kahdeksikon muotoista rataansa tai jotakin muuta sopivaa lähes suljettua rataa. Tällöin leijan painovoiman komponentti F_{wp}^{gra} vuorotellen jarruttaa ja vuorotellen kiihdyttää leijan vauhtia, joten kokonaisen kierroksen ajalla vaikutukset kumoutuvat, eihän leijan korkeus ja näin potentiaalienergiakaan muutu ainaan ratkaisevasti eri kierrosten välillä. Näin keskiarvoa etsittäessä F_{wp}^{gra} voidaan jättää pois kaavasta (3.27). Lisäksi F_{wp}^{line} voidaan jakaa kahteen osaan, köyden ilmanvastuskomponenttiin $F_{\text{fric}}^{\text{line}}$ sekä köyden painovoiman aiheuttamaan komponenttiin. Näistä köyden painovoimakomponentti voidaan jättää keskiarvokaavasta pois aivan samasta syystä kuin leijan painovoimakin, joten kaavan (3.27) keskiarvoksi saadaan

$$\langle\|\mathbf{W}_e^p\|\rangle \approx \langle V_{\parallel} - V_L \rangle \frac{L}{D + F_{\text{fric}}^{\text{line}}}. \quad (3.28)$$

Tässä $F_{\text{fric}}^{\text{line}}$ on siis koko köyden ilmanvastuksen aiheuttama paikkavektoria vastaan kohtisuora komponentti köyden jännityksessä leijan päässä. Suureiden aikakeskiarvot yhden leijan lentämän kierroksen ajalta merkitään jatkossakin kulmasulkeilla.

Otetaan nyt käyttöön käsite leijan aerodynaaminen tehokkuus G_e , joka kertoo kuinka moninkertaiseksi leijan paikkavektoria vastaan kohtisuora ilmanopeus pyrkii kasvamaan paikkavektorin suuntaiseen efektiiviseen tuulennopeuteen $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{W}_e$ verrattuna. Näin kaava (3.16) huomioiden saadaan

$$\langle\|\mathbf{W}_e^p\|\rangle = G_e \langle V_{\parallel} - V_L \rangle, \quad (3.29)$$

missä leijan nopeuslain keskiarvoversion (3.28) mukaan leijan aerodynaaminen tehokkuus on

$$G_e \approx \frac{L}{D + F_{\text{fric}}^{\text{line}}}. \quad (3.30)$$

Olkon tämä leijan nopeuslain keskiarvoversio jatkossa leijan nopeuslaki, sillä kyseessä on leijavoimalan tehoarvion kannalta keskeinen kaava. Kannattaa huomata, että lentokoneista tuttua termistöä käyttäen leijan aerodynaaminen tehokkuus on leijan liitoluku L/D korjattuna köyden aiheuttaman ylimääräisen ilmanvastuksen vaikutuksella.

3.2.4 Köyden ilmanvastuksen arviointi

Johdetaan seuraavaksi arvio kaavoissa (3.28) ja (3.30) esiintyvälle köyden ilmanvastuksen aiheuttamalle voimakomponentille $F_{\text{fric}}^{\text{line}}$. Käsitellään nyt köyttä suorana leijan paikkavektorin \mathbf{r} kanssa yhtyvänä tankona, jonka pyöreän poikkileikkauksen halkaisija on d^{line} . Näin paikkavektorin pituus r on samalla köyden pituus. Olkon

$x \in [0, r]$ köyden pituussuuntainen muuttuja. Jaetaan vielä kaavan (3.1) määrittelemä tuulivektori $\mathbf{W} = V\hat{\mathbf{i}}$ köyden suuntaiseen osuuteen $\mathbf{W}_{\parallel} = (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W})\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \stackrel{(3.15)}{=} V_{\parallel}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ ja köyttä vastaan kohtisuoraan osuuteen $\mathbf{W}_{\perp} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_{\parallel}$, jotka kaavan (3.5) mukaan ovat

$$\mathbf{W}_{\parallel} = V \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \quad \text{ja} \quad \mathbf{W}_{\perp} = V(\cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_{\theta} - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_{\phi}). \quad (3.31)$$

Nyt dx -pituisen köyden palaan kohdistuva köyttä vastaan kohtisuora aerodynaaminen voima $d\mathbf{F}_{\perp}^{\text{laer}}$ saadaan kirjassa [6] esitetystä ja lähteessä [7] käytetystä kaavasta

$$d\mathbf{F}_{\perp}^{\text{laer}} = \frac{1}{2}\rho_a d^{\text{line}} C_{\perp} \|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(x)\| \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(x) dx. \quad (3.32)$$

Tässä C_{\perp} on virtaukseen nähden poikittaisen sylinterin ilmanvastuskerroin ja $\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(x)$ on köydenpätkän kokeman efektiivisen tuulen köyttä vastaan kohtisuora projektiio, joka on pituuskoordinaatin x funktio. Leijan päässä pätee $\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(r) = \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\text{p}}$ ja generaattorin päässä jäljellä on vain tuulen osuus $\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(0) = \mathbf{W}_{\perp}$, sillä eihän köysi voi liikkua kiinnityspisteessään poikittaiseen suuntaan.

Näiden ääripäiden välillä leijan liikkeestä johtuva osuus efektiivisessä tuulussa kasvaa lineaarisesti, eli virtauksen nopeudeksi köyden ympärillä saadaan kaavan (3.7) tapaan

$$\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(x) = \mathbf{W}_{\perp} - \frac{x}{r} \dot{\mathbf{r}}_{\perp}, \quad (3.33)$$

missä $\dot{\mathbf{r}}_{\perp}$ on leijan nopeusvektorin köyttä vastaan kohtisuora projektiio, eli

$$\dot{\mathbf{r}}_{\perp} = \dot{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \stackrel{(3.15)}{=} \dot{\mathbf{r}} - V_L \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}. \quad (3.34)$$

Kannattaa vielä huomata edellisistä kaavoista yhteys

$$\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\text{p}} = \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(r) \stackrel{(3.33)}{=} \mathbf{W}_{\perp} - \dot{\mathbf{r}}_{\perp},$$

joten saadaan kaava $\dot{\mathbf{r}}_{\perp} = \mathbf{W}_{\perp} - \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\text{p}}$, jonka sijoittaminen kaavaan (3.33) antaa kätevän muodon

$$\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(x) = \left(1 - \frac{x}{r}\right) \mathbf{W}_{\perp} + \frac{x}{r} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\text{p}}. \quad (3.35)$$

Leijan köyden päähän kohdistama voimakomponentti $F_{\text{fric}}^{\text{line}}$ voidaan laskea köyteen kohdistuvien vääntömomenttien tasapainosta, jossa leijan köyden päähän kohdistaman vääntömomentin $rF_{\text{fric}}^{\text{line}}$ on oltava yhtä suuri kuin koko köyden ilmanvastuksen aiheuttama vääntömomentti köyden kiinnityspisteen suhteen. Tasapainotarkasteluun otetaan mukaan vain vektorin $\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\text{p}}$ suuntaiset voimakomponentit, sillä $F_{\text{fric}}^{\text{line}}$ on määritelty vektorin $\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\text{p}}$ suuntaiseksi komponentiksi. Näin koko köyden ilmanvastuksen aiheuttama vääntömomentti saadaan integroimalla köydenpätkään koh-

distuvaa vääntömomenttia $x(\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{F}_{\perp}^{\text{laer}})$ pituusmuuttujan x suhteen koko köyden yli, ja voimakomponentiksi $F_{\text{fric}}^{\text{line}}$ saadaan vääntömomenttitasapainon perusteella

$$F_{\text{fric}}^{\text{line}} = \frac{1}{r} \int_0^r x(\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{F}_{\perp}^{\text{laer}}). \quad (3.36)$$

Tehokkaasti toimivassa leijavoimalassa leija lentää moninkertaisella nopeudella tuuleen verrattuna eikä köysi ole läheskään poikittain tuuleen nähden, joten käytännössä $\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|$ on moninkertaisesti suurempi kuin $\|\mathbf{W}_{\perp}\|$. Näin \mathbf{W}_{\perp} -termin vaikutus kaavassa (3.35) on merkittävä vain pienimmillä muuttujan x arvoilla, eli generaattorin päässä, ja pienentyy nopeasti mitättömäksi muuttujan x kasvaessa. Lisäksi kaavan (3.36) integraalissa lähellä leijaa olevan köyden osan merkitys korostuu, joten voimme tehdä integraalia laskettaessa arvion

$$\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\perp}(x) \approx \frac{x}{r} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}, \quad (3.37)$$

jonka virhe häviää muuttujan x kasvaessa.

Arvion (3.37) avulla saadaan kaavasta (3.32)

$$(\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{F}_{\perp}^{\text{laer}})(x) \approx \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} C_{\perp} \underbrace{\left\| \frac{x}{r} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}} \right\|}_{\left\| \frac{x}{r} \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}} \right\|} dx = \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} C_{\perp} \frac{x^2}{r^2} \|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|^2 dx,$$

ja kaavan (3.1) mukaisella paikasta riippumattomalla tuulella saadaan kaavasta (3.36) tulokseksi

$$F_{\text{fric}}^{\text{line}} \approx \frac{1}{r} \int_0^r \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} C_{\perp} \frac{x^3}{r^2} \|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|^2 dx = \frac{1}{8} \rho_a d^{\text{line}} r C_{\perp} \|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}}\|^2. \quad (3.38)$$

3.2.5 Leijan lentonopeus

Kootaan vielä edellisten osioiden tuloksista kätevät kaavat leijan aerodynaamisen tehokkuuden ja ilmanopeuden laskemiseksi. Leijan ilmanopeus eli efektiivinen tuulivektori on kaavan (3.11) mukaan

$$\mathbf{W}_{\mathbf{e}} = \mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}} + (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{e}}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}},$$

josta kaavoja (3.12) ja (3.16) sekä leijan nopeuslakia (3.29) käyttämällä saadaan

$$\langle \mathbf{W}_{\mathbf{e}} \rangle = G_e \langle V_{\parallel} - V_L \rangle \hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}} + \langle V_{\parallel} - V_L \rangle \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}. \quad (3.39)$$

Tämä kaava on parannettu versio leijan nopeuslaista, sillä se kertoo leijan keskimääräisen ilmanopeuden komponentteina. Lyhyesti sanottuna paikkavektoria vas-

taan kohtisuora ilmanopeuskomponentti $\|\mathbf{W}_e^p\|$ kasvaa leijan nopeuslain (3.29) mukaan kertoimen G_e verran kaavan (3.16) mukaista paikkavektorin suuntaista komponenttia $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{W}_e = V_{\parallel} - V_L$ suuremmaksi. Koska kantavektori $\hat{\mathbf{w}}_p$ on määritelty kohtisuoraksi kantavektoria $\hat{\mathbf{e}}_r$ vastaan, saadaan leijan ilmanopeuden suuruudeksi yksinkertaisesti

$$\langle \|\mathbf{W}_e\| \rangle = \sqrt{G_e^2 + 1} \langle V_{\parallel} - V_L \rangle. \quad (3.40)$$

Sijoittamalla aerodynaamisen tehokkuuden kaavaan (3.30) siinä esiintyvien voimakomponenttien suuruudet kaavoista (3.10) ja (3.38) ja arvioimalla köyden ilmanvastuksen kohdalla $\|\mathbf{W}_e^p\| \approx \|\mathbf{W}_e\|$ saadaan leijan aerodynaamiselle tehokkuudelle kaava

$$G_e \approx \frac{C_L}{C_D + \frac{C_{\perp} d^{\text{line}_r}}{4A}}. \quad (3.41)$$

Tässä arvion $\|\mathbf{W}_e^p\| \approx \|\mathbf{W}_e\|$ aiheuttama virhe pienenee muidenkin kaavojen (3.30) ja (3.38) johtamisessa tehtyjen arviointien tavoin aerodynaamisen tehokkuuden G_e kasvaessa, sillä arviossa on itse asiassa jätetty ykkönen pois kaavan (3.40) neliöjuuren alta. Aerodynaamisesti tehokkaalla leijalla $\|\mathbf{W}_e\|$ on siis vain hieman suurempi kuin $\|\mathbf{W}_e^p\|$.

Kaava (3.41) antaa näin ollen leijan aerodynaamiselle tehokkuudelle G_e arvion, joka alkaa olla pätevä aerodynaamisen tehokkuuden ollessa joitakin kertoja ykköstä suurempi ja tarkentuu aerodynaamisen tehokkuuden kasvaessa. Leijan nopeuslaki (3.39) puolestaan kertoo leijan aerodynaamisen tehokkuuden merkityksen leijan ilmanopeuden kannalta.

4. LEIJAVOIMALAN TEHOARVIO

Johdetaan seuraavaksi kaava leijavoimalan mekaaniselle teholle P sähköntuotantovaiheen aikana. Kyse on siis leijan synnyttämästä mekaanisesta tehosta, joka on köyden välittämänä käytettävissä generaattorin pyörittämiseen silloin, kun leija vetää köyttä ulos ja teho halutaan maksimoida sähkön tuottamiseksi. Tämän tehon laskemiseen voidaan käyttää mekaniikan peruskaavaa

$$P = F^{\text{gen}} V_L^*, \quad (4.1)$$

missä F^{gen} on köyden jännitys maassa kiinnityspisteessään ja V_L^* on köyden vapautusnopeus eli köyden pituuden aikaderivaatta. Käytetään jatkossa köyden vapautusnopeuden V_L^* paikalla kaavassa (3.15) määriteltyä leijan paikkavektorin suuntaista nopeuskomponenttia V_L olettaen köyden kaarevuus niin vähäiseksi, ettei tästä arviosta aiheudu merkittävää virhettä.

4.1 Köyden jännitys

4.1.1 Jännityksen muuttuminen köydessä

Koska köydellä on massa, ja siihen kohdistuu aerodynaaminen voima, ei köyden jännitys ole vakio köyden eri kohdissa. Tarkastellaan nyt köyden jännityksen F^{ten} muuttumista yksikkövektorin $\hat{\mathbf{e}}_r$ määräämässä suunnassa olettaen köysi lähes suoraksi. Todellisuudessa köysi ei ole suora, mutta köyden poikkeama leijan paikkavektorista on tehokkaasti toimivalla voimalalla varsin pieni köyden jännityksen ollessa huomattavasti muita köyteen vaikuttavia voimia suurempi. Näin köyden jännityksen leijan paikkavektorin suuntaisen komponentin $F_{\parallel}^{\text{ten}}$ muutokseksi saadaan köyden palasen matkalla

$$dF_{\parallel}^{\text{ten}} = dF_{\parallel}^{\text{lgra}} - dF_{\parallel}^{\text{laer}} - dF^{\text{lcf}}, \quad (4.2)$$

kun edetään generaattorista leijaa kohti. Tässä $dF_{\parallel}^{\text{laer}}$ on köydenpalaseen kohdistuvan aerodynaamisen voiman paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus ja $dF_{\parallel}^{\text{lgra}}$ vastaavasti köydenpalasen painovoiman paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus. Koska käytettävä pallokoordinaatisto on käyräviivainen, täytyy voimatasapainoon lisätä vielä köydenpalaseen kohdistuva keskipakoisvoima dF^{lcf} .

Kun otetaan käyttöön köyden pituusmassa μ , eli köyden massa jaettuna pituudella, sekä edellisestä osiosta tuttu paikkavektorin \mathbf{r} suuntaan kasvava muuttuja $x \in [0, r]$, saadaan kaavan (3.6) tapaan

$$dF_{\parallel}^{\text{lgra}} \approx \mu g \cos \theta dx, \quad (4.3)$$

missä on jätetty huomioimatta köyden kaarevuudesta johtuva palasen hieman muuttujan x muutosta suurempi pituus. Samoilla oletuksilla saadaan köydenpalaseen kohdistuvan keskipakoisvoiman dF^{lcf} suuruudeksi

$$dF^{\text{lcf}} \approx \mu x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) dx. \quad (4.4)$$

Keskipakoisvoiman kaava on johdettu liitteessä 1 leijalle, ja köydenpalaselle sopiva versio saadaan korvaamalla leijan massa m köydenpalasen massalla μdx sekä leijan koordinaatti r köydenpalasen vastaavalla koordinaatilla x .

Köyden aerodynaamisen voiman köydensuuntainen vaikutus voidaan laskea samalla tavalla kuin kaavan (3.32) määrittelemä köyttä vastaan kohtisuora komponentti, mutta kertoimen C_{\perp} tilalle on laitettava köydensuuntaisen virtauksen vastusta kuvaava köyden aerodynaaminen kitkakerroin C_{\parallel} ja virtausnopeuden komponentti on vaihdettava köydensuuntaiseksi komponentiksi $\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\parallel}(x)$, joten saadaan kirjassa [6] esitetty ja lähteessä [7] käytetty kaava

$$dF_{\parallel}^{\text{laer}} = \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} C_{\parallel} \|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\parallel}(x)\|^2 dx. \quad (4.5)$$

Koska köyden pituussuuntaista liikettä aiheutuu vain köyden pituuden muuttumisesta, eikä kaavan (3.1) määrittelemä tuulivektorikaan muutu korkeuden mukana, on $\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\parallel}(x)\|$ vakio x :n suhteen ja näin koko köyden matkalla sama kuin leijan päässä määritely $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{e}}$. Näin kaavan (3.16) nojalla saadaan

$$\|\mathbf{W}_{\mathbf{e}}^{\parallel}(x)\| = V_{\parallel} - V_L \quad (4.6)$$

kaikilla muuttujan x arvoilla.

Sijoittamalla kaavat (4.3), (4.4), (4.5) ja (4.6) yhtälöön (4.2) saadaan yhtälö

$$dF_{\parallel}^{\text{ten}} \approx \mu g \cos \theta dx - \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} C_{\parallel} (V_{\parallel} - V_L)^2 dx - \mu x (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) dx, \quad (4.7)$$

josta integroimalla x :n suhteen puolittain koko köyden yli saadaan

$$F_{\parallel}^{\text{ten}}(r) - F_{\parallel}^{\text{ten}}(0) \approx \mu r g \cos \theta - \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} r C_{\parallel} (V_{\parallel} - V_L)^2 - \frac{1}{2} \mu r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta). \quad (4.8)$$

Tässä $F_{\parallel}^{\text{ten}}(r)$ on köyden jännityksen paikkavektorin suuntainen komponentti leijan

päässä eli köyden leijaan paikkavektorin suunnassa kohdistaman voiman suuruus F_r^{line} , joten merkitään $F_{\parallel}^{\text{ten}}(r) = F_r^{\text{line}}$. Arvioidaan lisäksi generaattorin saamaa köyden jännitystä F^{gen} hieman alaspäin arviolla $F^{\text{gen}} \approx F_{\parallel}^{\text{ten}}(0)$, eli ottamalla mukaan vain paikkavektorin suuntainen voima. Näin kaavasta (4.8) saadaan köyden jännitykselle generaattorilla kaava

$$\begin{aligned} F^{\text{gen}} &\approx F_r^{\text{line}} + \frac{1}{2}\rho_a d^{\text{line}} r C_{\parallel} (V_{\parallel} - V_L)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \mu r g \cos \theta \\ &= F_r^{\text{line}} + F_{\parallel}^{\text{laer}} + F^{\text{lcf}} - F_{\parallel}^{\text{lgra}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

missä $F_{\parallel}^{\text{laer}} \approx \frac{1}{2}\rho_a d^{\text{line}} r C_{\parallel} (V_{\parallel} - V_L)^2$ on koko köyteen kohdistuvan paikkavektorin suuntaisen aerodynaamisen voiman suuruus, $F^{\text{lcf}} \approx \frac{1}{2}\mu r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$ koko köyteen kohdistuvan keskipakoisvoiman suuruus ja $F_{\parallel}^{\text{lgra}} \approx \mu r g \cos \theta$ on koko köyden painovoiman paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus. Kaikissa näissä voimissa köyden pituutta arvioidaan hieman alaspäin leijan etäisyydellä kiinnityspisteestä, mutta voimien vastakkaisen vaikutuksen takia nämä pienet arviot osittain kumoavat toisensa.

4.1.2 Paikkavektorin suuntainen voimatasapaino leijassa

Tarkastellaan seuraavaksi paikkavektorin \mathbf{r} suuntaista voimatasapainoa leijassa voiman $\mathbf{F}_r^{\text{line}}$ laskemiseksi. Oletetaan nyt, että köyttä vapautetaan maassa vakionopeudella sähköntuotantovaiheen aikana, jolloin leijalla ei ole kiihtyvyyttä paikkavektorin suunnassa. Näin ollen tasapainoehtona leijaan vaikuttavien paikkavektorin suuntaisten voimakomponenttien on kumottava toisensa. Leijaan vaikuttavia paikkavektorin suuntaisia voimakomponentteja ovat köyden jännityksen komponentin

$$\mathbf{F}_r^{\text{line}} = -F_r^{\text{line}} \hat{\mathbf{e}}_r \quad (4.10)$$

lisäksi kaavan (3.18) mukainen aerodynaamisen voiman komponentti

$$\mathbf{F}_r^{\text{aer}} = (L \cos \alpha + D \sin \alpha) \hat{\mathbf{e}}_r = F_r^{\text{aer}} \hat{\mathbf{e}}_r \quad (4.11)$$

sekä kaavan (3.6) mukainen leijan painovoiman komponentti

$$\mathbf{F}_r^{\text{gra}} = -mg \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r = -F_r^{\text{gra}} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (4.12)$$

Näiden todellisten voimien lisäksi on otettava mukaan käytössä olevan pallokoordinaatiston käyräviivaisuuden takia keskipakoisvoima, joka pallokoordinaatistossa on kaavan (4.4) tavoin liitteessä 1 johdettu

$$\mathbf{F}^{\text{cf}} = mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{e}}_r = F^{\text{cf}} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (4.13)$$

Näin tasapainoehdosta $\mathbf{F}_r^{\text{line}} + \mathbf{F}_r^{\text{aer}} + \mathbf{F}_r^{\text{gra}} + \mathbf{F}^{\text{cf}} = \mathbf{0}$ saadaan leijan köyteen kohdistaman voiman suuruudeksi

$$F_r^{\text{line}} = F_r^{\text{aer}} - F_r^{\text{gra}} + F^{\text{cf}}. \quad (4.14)$$

4.2 Keskimääräinen teho sähköntuotantovaiheessa

Edellisten leijan paikkavektorin suunnassa tehtyjen voimatasapainolaskujen perusteella saadaan kaavoista (4.1), (4.9) ja (4.14) leijavoimalan hetkelliselle mekaaniselle teholle kaava

$$P = F^{\text{gen}} V_L = V_L (F_r^{\text{aer}} - F_r^{\text{gra}} - F_{\parallel}^{\text{lgra}} + F_{\parallel}^{\text{laer}} + F^{\text{cf}} + F^{\text{lcf}}), \quad (4.15)$$

jossa esiintyvät voimakomponenttien suuruudet voidaan laskea kaavojen (4.9), (4.11), (4.12) ja (4.13) avulla.

Tarkoituksena on kuitenkin johtaa arvio leijavoimalan keskimääräiselle mekaaniselle teholle $\langle P \rangle$ sähköntuotantovaiheen aikana, joten lasketaan hetkellisen tehon aikakeskiarvo yhden leijan lentämän kierroksen ajalta. Tehon aikakeskiarvohan lasketaan jakamalla hetkellistä tehoa ajan suhteen integroimalla saatava kierroksen aikana tuotettu energia kierrosajalla, eli

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt, \quad (4.16)$$

missä T on leijan lentämään kierrokseen kuluva aika. Sijoittamalla kaavassa (4.15) oleva voimien avulla ilmaistu hetkellinen teho kaavaan (4.16) ja olettamalla köyden vapautusnopeus V_L edellisten laskujen tavoin vakioksi ajan suhteen saadaan keskimääräiselle teholle kaava

$$\langle P \rangle = V_L (\langle F_r^{\text{aer}} \rangle - \langle F_r^{\text{gra}} \rangle - \langle F_{\parallel}^{\text{lgra}} \rangle + \langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle + \langle F^{\text{cf}} \rangle + \langle F^{\text{lcf}} \rangle). \quad (4.17)$$

Tässä voimakomponenttien suuruuksien aikakeskiarvot lasketaan tehon keskiarvon tavoin jakamalla kierrosajalla suureen integraali ajan suhteen kierroksen ajalta.

4.2.1 Paikkavektorin suuntaiset keskimääräiset voimat

Johdetaan seuraavaksi leijaan kohdistuvan aerodynaamisen voiman paikkavektorin suuntaisen komponentin keskimääräiselle suuruudelle $\langle F_r^{\text{aer}} \rangle$ leijan nopeuslakia (3.29) käyttämällä kaava, jossa ei esiinny kulmaa α . Sijoitetaan aluksi kaavaan (4.11) nostovoiman ja ilmanvastuksen suuruudet kaavasta (3.10), jolloin saadaan muoto

$$F_r^{\text{aer}} = \frac{1}{2} \rho_a A \|\mathbf{W}_e\|^2 (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha).$$

Kulmasta α päästään nyt eroon sijoittamalla $\cos \alpha$ kaavasta (3.14) ja $\sin \alpha$ kaavasta (3.16), jolloin päästään muotoon

$$F_r^{\text{aer}} = \frac{1}{2} \rho_a A \|\mathbf{W}_e\| \left(C_L \|\mathbf{W}_e^p\| + C_D (V_{\parallel} - V_L) \right).$$

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan keskiarvoja, jolloin saadaan tarkka kaava

$$\langle F_r^{\text{aer}} \rangle = \frac{1}{2} \rho_a A \left(C_L \langle \|\mathbf{W}_e\| \|\mathbf{W}_e^p\| \rangle + C_D \langle \|\mathbf{W}_e\| (V_{\parallel} - V_L) \rangle \right).$$

Arvioidaan sitten tulojen keskiarvoja keskiarvojen tuloilla, jolloin erityisesti arvio $\langle \|\mathbf{W}_e\| \|\mathbf{W}_e^p\| \rangle \approx \langle \|\mathbf{W}_e\| \rangle \langle \|\mathbf{W}_e^p\| \rangle$ aiheuttaa hieman todellista pienemmän keskimääräisen voiman. Näin saadaan arvio

$$\langle F_r^{\text{aer}} \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a A \left(C_L \langle \|\mathbf{W}_e\| \rangle \langle \|\mathbf{W}_e^p\| \rangle + C_D \langle \|\mathbf{W}_e\| \rangle \langle V_{\parallel} - V_L \rangle \right),$$

josta saadaan leijan nopeuslain muotojen (3.29) ja (3.40) sijoittamisella kaava

$$\langle F_r^{\text{aer}} \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a A \sqrt{G_e^2 + 1} \langle V_{\parallel} - V_L \rangle^2 (C_L G_e + C_D).$$

Lopputuloksen yksinkertaistamiseksi tehdään vielä arvio

$$C_L G_e + C_D = C_L G_e \left(1 + \frac{C_D}{C_L G_e} \right) \approx C_L G_e,$$

missä pois jätettävä termi on liitoluvun neliön käänteislukua pienempi ja näin aerodynaamisesti tehokkaalla leijalla paljon ykköstä pienempi. Näin saadaan paikkavektorin suuntaisen aerodynaamisen voiman suuruudelle hyödyllinen kaava

$$\langle F_r^{\text{aer}} \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a A C_L G_e \sqrt{G_e^2 + 1} \langle V_{\parallel} - V_L \rangle^2. \quad (4.18)$$

Kaava (4.18) antaa arvion yhdelle tehokaavassa (4.17) esiintyvistä voimakomponenttien keskimääräisistä suuruuksista, joten kootaan seuraavaksi arviot muillekin kaavassa (4.17) esiintyville voimakomponenttien suuruuksien keskiarvoille tehoarvion laskemiseksi. Painovoimakomponenteille saadaan yksinkertaisesti arviot

$$\langle F_r^{\text{gra}} \rangle \approx mg \cos \theta_* \quad \text{ja} \quad \langle F_{\parallel}^{\text{lgra}} \rangle \approx \mu r_* g \cos \theta_*, \quad (4.19)$$

joissa θ_* on keskimääräinen pystysuoran ja leijan paikkavektorin välinen kulma leijan lentoradalla, eli pystysuoran ja leijan paikkavektorin välinen kulma lentoradan keskellä. Lisäksi r_* on köyden keskimääräinen pituus yhden leijan lentämän kierroksen aikana. Köyteen kohdistuvan köydensuuntaisen aerodynaamisen voiman keskiarvok-

si saadaan suoraan kaavasta (4.9)

$$\langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} r_* C_{\parallel} \langle (V_{\parallel} - V_L)^2 \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} r_* C_{\parallel} \langle V_{\parallel} - V_L \rangle^2. \quad (4.20)$$

Sitten puuttuvat enää keskipakoisvoimien keskiarvot, joista leijan keskipakoisvoimalle saadaan kaavasta (4.13)

$$\langle F^{\text{cf}} \rangle = \frac{m}{T} \int_0^T r (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) dt \approx \frac{m r_*}{T} \int_0^T (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) dt. \quad (4.21)$$

Tässä leijan paikkavektorin muuttuva pituus on laskennan helpottamiseksi korvattu köyden keskimääräisellä pituudella r_* olettaen, että leija lentää yhden kierroksen niin nopeasti, ettei köyden pituus ehdi muuttua yhden kierroksen aikana ratkaisevasti. Kaavan (4.9) perusteella saadaan vastaavasti köyden keskipakoisvoimalle arvio

$$\langle F^{\text{lcf}} \rangle \approx \frac{\mu}{2T} \int_0^T r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) dt \approx \frac{\mu r_*^2}{2T} \int_0^T (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) dt. \quad (4.22)$$

4.2.2 Leijavoimalan tehokaava

Leijavoimalan sähköntuotanto perustuu lähes kokonaan leijaan kohdistuvaan mahdollisimman suureen aerodynaamiseen voimaan, joten tehokkaasti toimivalla leijavoimalalla tehokaavassa (4.17) esiintyvistä voimista leijan aerodynaamisen voiman pitäisi olla paljon kaikkia muita suurempi. Jatketaan näin ollen sijoittamalla kaavan (4.18) mukainen aerodynaamisen voiman suuruus tehokaavaan (4.17), jolloin saadaan leijavoimalan mekaaniselle teholle kaava

$$\langle P \rangle \approx V_L \left(\frac{1}{2} \rho_a A C_L G_e \sqrt{G_e^2 + 1} \langle V_{\parallel} - V_L \rangle^2 + f \right), \quad (4.23)$$

jossa muiden voimien osuudet on koottu lyhennysmerkintänä yhteen termiin

$$f = \langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle - \langle F_r^{\text{gra}} \rangle - \langle F_{\parallel}^{\text{lgra}} \rangle + \langle F^{\text{cf}} \rangle + \langle F^{\text{lcf}} \rangle. \quad (4.24)$$

Tehokaavassa (4.23) esiintyvä tuulen nopeuden paikkavektorin suuntaisen komponentin suuruus V_{\parallel} on kaavan (3.31) mukaan $V \sin \theta \cos \phi$, joten sekin vaihtelee jonkin verran leijan kierroksen aikana ja täytyy näin korvata jollakin keskimääräisellä vakiolla. Tehon maksimoimiseksi leijan lentorata on valittava tuulen suunnan mukaan niin, että radan keskipiste on suoraan myötätuuleen ja kulma ϕ vaihtelee kierroksen aikana nollan molemmilla puolilla. Näin keskimääräinen kulma ϕ_* on nolla ja saadaan arvio

$$\langle V_{\parallel} \rangle \approx V \sin \theta_*, \quad (4.25)$$

joka on hyvä pienillä kulmien vaihteluilla eli silloin, kun leijan lentorata täyttää vain pienen osan taivaasta leijan kiinnityskohdasta katsottuna. Aikaisemminkin köyden vapautusnopeus V_L on oletettu vakioksi, joten otetaan käyttöön merkintä

$$V_L = v_L \langle V_{\parallel} \rangle, \quad (4.26)$$

jossa $v_L \in [0, 1]$ on köyden vapautusnopeuskerroin. Näin saadaan kaavoja (4.25) ja (4.26) käyttäen arvio

$$\langle V_{\parallel} - V_L \rangle^2 = (\langle V_{\parallel} \rangle - V_L)^2 = (1 - v_L)^2 \langle V_{\parallel} \rangle^2 \approx (1 - v_L)^2 V^2 \sin^2 \theta_*, \quad (4.27)$$

joka on tarkimmillaan pienillä kulmien vaihteluilla.

Kaavoja (4.26) ja (4.27) käyttämällä saadaan tehokaava (4.23) muotoon

$$\langle P \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a AC_L G_e \sqrt{G_e^2 + 1} v_L (1 - v_L)^2 \langle V_{\parallel} \rangle^3 + v_L \langle V_{\parallel} \rangle f,$$

joka voidaan muokata edelleen muotoon

$$\langle P \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a AC_L \langle V_{\parallel} \rangle^3 v_L (1 - v_L)^2 G_e \sqrt{G_e^2 + 1} \left(1 + \frac{f}{\frac{1}{2} \rho_a AC_L \langle V_{\parallel} \rangle^2 G_e \sqrt{G_e^2 + 1} (1 - v_L)^2} \right).$$

Otetaan nyt käyttöön merkintä

$$k_0 = v_L (1 - v_L)^2 G_e \sqrt{G_e^2 + 1}, \quad (4.28)$$

jolloin päästään muotoon

$$\langle P \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a AC_L \langle V_{\parallel} \rangle^3 k_0 \left(1 + 2v_L \frac{f}{\rho_a AC_L \langle V_{\parallel} \rangle^2 k_0} \right). \quad (4.29)$$

Kaavojen (4.25) ja (4.24) avulla saadaan leijavoimalan mekaaniselle teholle kaava

$$\langle P \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a AC_L V^3 \sin^3 \theta_* k_0 k_*, \quad (4.30)$$

missä kertoimet ovat

$$\begin{aligned} k_0 &= v_L (1 - v_L)^2 G_e \sqrt{G_e^2 + 1} \quad \text{ja} \\ k_* &= 1 + 2v_L \frac{\langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle - \langle F_r^{\text{gra}} \rangle - \langle F_{\parallel}^{\text{lgra}} \rangle + \langle F^{\text{cf}} \rangle + \langle F^{\text{lcf}} \rangle}{\rho_a AC_L k_0 V^2 \sin^2 \theta_*}. \end{aligned}$$

Arviot kertoimessa k_* esiintyvillä voimakomponenttien suuruuksien keskiarvoille voi-

daan laskea kaavojen (4.19), (4.20), (4.21) ja (4.22) avulla. Kaava (4.20) kannattaa kuitenkin muokata arviota (4.27) käyttämällä muotoon

$$\langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a d^{\text{line}} r C_{\parallel} (1 - v_L)^2 V^2 \sin^2 \theta_*. \quad (4.31)$$

4.3 Leijavoimalan teho optimaalisella köyden vapautusnopeudella

4.3.1 Teho köyden vapautusnopeuden funktiona

Etsitään seuraavaksi suurimman tehon tuottava arvo köyden vapautusnopeudelle V_L ja samalla myös tehokaavassa (4.30) esiintyvälle köyden vapautusnopeuskertoimelle v_L . Kyseinen optimiarvohan on olemassa, sillä vakiopituuisella köydellä teho on nolla ja toisaalta tilanteessa $V_L = V_{\parallel}$ leija ei enää pysy ilmassa tuulen puuttuessa kokonaan ja taaskin teho on nolla. Näiden ääripäiden välillä leija kuitenkin tuottaa tehoa, joten ainakin yksi optimiarvo V_L^{opt} on välillä $(0, V_{\parallel})$.

Käytetään optimiarvon ratkaisemiseen leijavoimalan mekaanisen tehon kaavan muotoa (4.23). Tässä kaavassa esiintyvässä määritelmän (4.24) mukaisessa termisessä f vain köyden aerodynaamisen voiman osuus $\langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle$ riippuu köyden vapautusnopeudesta V_L , joten muiden voimien osuudet voidaan koota optimointiongelmää ratkaistaessa yhdeksi vakiotermitiksi

$$b = -\langle F_r^{\text{gra}} \rangle - \langle F_{\parallel}^{\text{lgra}} \rangle + \langle F^{\text{cf}} \rangle + \langle F^{\text{lcf}} \rangle. \quad (4.32)$$

Näin saadaan tehokaavalle (4.23) kaavoja (4.20) ja (4.32) käyttämällä muoto

$$\langle P \rangle \approx V_L \left(\frac{1}{2} \rho_a \left(AC_L G_e \sqrt{G_e^2 + 1} + d^{\text{line}} r_* C_{\parallel} \right) \langle V_{\parallel} - V_L \rangle^2 + b \right),$$

josta voidaan erotella vakiokerroin

$$a = \frac{1}{2} \rho_a \left(AC_L G_e \sqrt{G_e^2 + 1} + d^{\text{line}} r_* C_{\parallel} \right), \quad (4.33)$$

ja näin saadaan tehokaavalle optimointiongelman ratkaisemiseen sopiva muoto

$$\langle P \rangle \approx V_L (a \langle V_{\parallel} - V_L \rangle^2 + b) \stackrel{(4.27)}{\approx} V_L (a (\langle V_{\parallel} \rangle - V_L)^2 + b). \quad (4.34)$$

4.3.2 Köyden vapautusnopeuden optimointi

Ratkaistaan sitten optimaalinen V_L laskemalla kaavan (4.34) derivaatan nollakohdat olettaen, että tehofunktio (4.34) olisi tarkka. Kaavan (4.34) mukaisen tehon

keskiarvon derivaatta köyden vapautusnopeuden suhteen on

$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial V_L} = a(\langle V_{\parallel} \rangle - V_L)^2 + b - 2aV_L(\langle V_{\parallel} \rangle - V_L) = 3aV_L^2 - 4a\langle V_{\parallel} \rangle V_L + a\langle V_{\parallel} \rangle^2 + b,$$

josta saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla derivaatan nollakohdiksi

$$V_L^{\text{dzero}} = \frac{4a\langle V_{\parallel} \rangle \pm \sqrt{16a^2\langle V_{\parallel} \rangle^2 - 12a(a\langle V_{\parallel} \rangle^2 + b)}}{6a} = \frac{2a\langle V_{\parallel} \rangle \pm \sqrt{a^2\langle V_{\parallel} \rangle^2 - 3ab}}{3a}.$$

Merkitään nyt

$$V_L^{\text{dzero1}} = \frac{2a\langle V_{\parallel} \rangle + \sqrt{a^2\langle V_{\parallel} \rangle^2 - 3ab}}{3a} \quad \text{ja} \quad V_L^{\text{dzero2}} = \frac{2a\langle V_{\parallel} \rangle - \sqrt{a^2\langle V_{\parallel} \rangle^2 - 3ab}}{3a}. \quad (4.35)$$

Koska tehon keskiarvon toinen derivaatta köyden vapautusnopeuden suhteen

$$\frac{\partial^2 \langle P \rangle}{\partial V_L^2} = 6aV_L - 4a\langle V_{\parallel} \rangle$$

on kaavan (4.35) mukaisissa derivaatan nollakohdissa

$$\frac{\partial^2 \langle P \rangle}{\partial V_L^2}(V_L^{\text{dzero1}}) = 2\sqrt{a^2\langle V_{\parallel} \rangle^2 - 3ab} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 \langle P \rangle}{\partial V_L^2}(V_L^{\text{dzero2}}) = -2\sqrt{a^2\langle V_{\parallel} \rangle^2 - 3ab},$$

saadaan maksimiarvon negatiivinen toinen derivaatta köyden vapautusnopeudella V_L^{dzero2} . Näin saadaan köyden optimaaliseksi vapautusnopeudeksi

$$V_L^{\text{opt}} \approx \frac{2a\langle V_{\parallel} \rangle - \sqrt{a^2\langle V_{\parallel} \rangle^2 - 3ab}}{3a} = \frac{2}{3}\langle V_{\parallel} \rangle - \frac{1}{3}\langle V_{\parallel} \rangle \sqrt{1 - \frac{3b}{a\langle V_{\parallel} \rangle^2}}, \quad (4.36)$$

joka ei ole tehokaavan (4.34) johtamisessa tehtyjen arviointien takia tarkka, vaikka optimointiongelmalla onkin ratkaistu tarkasti symbolisella laskennalla.

Tarkastellaan tarkemmin optimaalisen köyden vapautusnopeuden lausekkeessa (4.36) olevaa termiä $\frac{3b}{a\langle V_{\parallel} \rangle^2}$. Nimittäjän $a\langle V_{\parallel} \rangle^2$ on itse asiassa leijan ja köyden aerodynaamisten voimien tehokaavassa (4.17) olevien osuuksien summa $\langle F_r^{\text{aer}} \rangle + \langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle$ köyden vapautusnopeuden ollessa nolla, ja näin todellisuudessa $a\langle V_{\parallel} \rangle^2$ on suurempi kuin aerodynaamisten voimien vaikutukset köyden jännitykseen. Toisaalta osoittajan b sisältää määritelmän (4.32) mukaisesti muiden voimien osuudet köyden jännityksessä tehokaavassa (4.17). Tehokkaasti toimivan leijavoimalan köyden jännitys on pääosin leijan aerodynaamisen voiman synnyttämää, joten b :n eri voimien kumoessa toisiaan $a\langle V_{\parallel} \rangle^2$ on paljon suurempi kuin $|b|$ ja termi $\frac{3b}{a\langle V_{\parallel} \rangle^2}$ on itseisarvoltaan paljon ykköstä pienempi. Näin ollen voidaan arvioida neliöjuuren sarjakehitelmää

käyttäen

$$\sqrt{1 - \frac{3b}{a\langle V_{\parallel} \rangle^2}} \approx 1 - \frac{3b}{2a\langle V_{\parallel} \rangle^2},$$

ja saadaan optimaaliselle köyden vapautusnopeudelle arvio

$$V_L^{\text{opt}} \approx \frac{2}{3}\langle V_{\parallel} \rangle - \frac{1}{3}\langle V_{\parallel} \rangle \left(1 - \frac{3b}{2a\langle V_{\parallel} \rangle^2} \right) = \frac{1}{3}\langle V_{\parallel} \rangle + \frac{b}{2a\langle V_{\parallel} \rangle} \quad (4.37)$$

4.3.3 Optimaalinen köyden vapautusnopeus ja teho

Kun määritelmien (4.33) ja (4.32) mukaiset a ja b sijoitetaan paikoilleen, saadaan tuloksena suurimman tehon tuottavaksi köyden vapautusnopeudeksi

$$V_L^{\text{opt}} \approx \frac{1}{3}\langle V_{\parallel} \rangle + \frac{-\langle F_r^{\text{gra}} \rangle - \langle F_{\parallel}^{\text{lgra}} \rangle + \langle F^{\text{cf}} \rangle + \langle F^{\text{lcf}} \rangle}{\rho_a \left(AC_L G_e \sqrt{G_e^2 + 1} + d^{\text{liner}_*} C_{\parallel} \right) \langle V_{\parallel} \rangle}. \quad (4.38)$$

Jos varsin pieneksi jäävän termin b osuus tehokaavassa (4.17) jätetään huomioimatta optimaalista köyden vapautusnopeutta etsittäessä, saadaan $b = 0$ ja $V_L^{\text{opt}} \approx \frac{1}{3}\langle V_{\parallel} \rangle$. Voidaan siis todeta, että määritelmän (4.26) mukainen optimaalinen köyden vapautusnopeuskerroin v_L^{opt} on suunnilleen yksi kolmasosa. Sijoittamalla tulos

$$v_L^{\text{opt}} \approx \frac{1}{3} \quad (4.39)$$

tehokaavaan (4.30) saadaan leijavoimalan mekaanisen tehon maksimiarvoksi yhden leijan lentämän kierroksen ajalle keskiarvoistettuna suunnilleen

$$\langle P_{\text{max}} \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a AC_L V^3 \sin^3 \theta_* k_0^{\text{max}} k_*^{\text{max}}, \quad (4.40)$$

missä kertoimet ovat

$$k_0^{\text{max}} = \frac{4}{27} G_e \sqrt{G_e^2 + 1} \quad \text{ja}$$

$$k_*^{\text{max}} = 1 + \frac{2 \langle F_{\parallel}^{\text{laer}} \rangle - \langle F_r^{\text{gra}} \rangle - \langle F_{\parallel}^{\text{lgra}} \rangle + \langle F^{\text{cf}} \rangle + \langle F^{\text{lcf}} \rangle}{\rho_a AC_L k_0^{\text{max}} V^2 \sin^2 \theta_*}.$$

Arviot kertoimessa k_*^{max} esiintyvälle voimakomponenttien suuruuksien keskiarvoille voidaan laskea kaavojen (4.19), (4.21), (4.22) ja (4.31) avulla.

5. ESIMERKKI TEHOKAAVAN KÄYTÖSTÄ

Käytetään nyt leijavoimalan tehokaavaa julkaisussa [3] esitellyn KiteGen-prototyypin tehon arvioimiseen. Tämän KiteGen-prototyypin simulaatiossa käytetyn leijan siipipinta-ala on 5 m^2 , massa on $2,5 \text{ kg}$, nostovoimakerroin on $1,2$ ja aerodynaaminen tehokkuus on 8 . Ilman tiheytenä on käytetty arvoa $1,2 \text{ kg/m}^3$ ja tuulen nopeus muuttuu korkeuden mukaan ja on esimerkiksi sadan metrin korkeudella 12 m/s . Julkaisussa olevasta leijan lentorataa esittävästä kuvasta 11 nähdään, että leijan kahdeksikkoradan keskipisteen ollessa sadan metrin korkeudella on leija noin 270 metrin päässä kiinnityspisteestä maanpintaa pitkin mitattuna. Näin saadaan köyden pituudeksi

$$r_* = \sqrt{(270 \text{ m})^2 + (100 \text{ m})^2} \approx 290 \text{ m}$$

sekä pystysuoran ja köyden väliseksi kulmaksi

$$\theta_* = \tan^{-1} \left(\frac{270 \text{ m}}{100 \text{ m}} \right) \approx 70^\circ.$$

Simulaatiossa köyden maksimipituudeksi on määritelty 290 metriä , joten näillä arvoilla ollaan aivan sähköntuotantovaiheen lopussa.

Köyden vapautusnopeus simulaatiossa on vakiona pysyvä $1,5 \text{ m/s}$, joten köyden vapautusnopeuskertoimeksi saadaan kaavoja (4.26) ja (4.25) käyttämällä

$$v_L = \frac{V_L}{\langle V_{\parallel} \rangle} \approx \frac{V_L}{V \sin \theta_*} = \frac{1,5 \text{ m/s}}{12 \text{ m/s} \sin(70^\circ)} \approx 0,13.$$

Köyden vapautusnopeus on siis selvästi optimiarvoa pienempi, joten vertailukelpoisen tehoarvion saamiseksi on käytettävä vapautusnopeuskertoimen sisältävää tehokaavan versiota (4.30).

Köyden vaikutusta ei ole huomioitu KiteGen-prototyypin simulaatiossa, joten köyden massa ja halkaisija on laskettava köyden lujuusvaatimusten mukaan. Oletetaan, että leijavoimalan köyden on kestettävä leijan lennättäminen kaikissa tilanteissa, kun tuulen nopeus on maksimissaan V_{\max} . Lähdetään köyden mitoituksessa liikkeelle suurimman köyden kestämän jännityksen F_{\max}^{ten} antavasta kaavasta

$$F_{\max}^{\text{ten}} = \sigma \frac{\pi}{4} (d^{\text{line}})^2, \quad (5.1)$$

missä σ on köysimateriaalin vetolujuus eli suurin mahdollinen jännitys jaettuna poikkipinta-alalla. Köyden suurinta mahdollista jännitystä voidaan arvioida esimerkiksi kaavan (4.18) antamalla köydensuuntaisella aerodynaamisella voimalla tilanteessa, jossa voima maksimoituu leijan lentäessä aivan maanpinnassa ja köyden pituuden ollessa muuttumaton. Tällöin pätee $\langle V_{\parallel} - V_L \rangle \approx V_{\max}$ ja maksimijännitykseksi saadaan

$$F_{\max}^{\text{ten}} \approx \frac{1}{2} \rho_a A C_L G_e \sqrt{G_e^2 + 1} V_{\max}^2. \quad (5.2)$$

Näin kaavoista (5.1) ja (5.2) saadaan köyden halkaisijalle kaava

$$d^{\text{line}} = \sqrt{\frac{4}{\pi \sigma} F_{\max}^{\text{ten}}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma} \rho_a A C_L G_e \sqrt{G_e^2 + 1} V_{\max}^2}. \quad (5.3)$$

Köyden pituusmassa saadaan yksinkertaisesti kaavalla

$$\mu = \rho_l \frac{\pi}{4} (d^{\text{line}})^2, \quad (5.4)$$

missä ρ_l on köysimateriaalin tiheys.

Oletetaan, että KiteGen-prototyypin köysi on valmistettu Dyneemasta, joka on nykyisistä materiaaleista sopivin kevyenä, lujana ja muutenkin ominaisuuksiltaan sopivana materiaalina ja jota käytetään esimerkiksi vetoleijojen naruissa. Lähteiden [8] ja [9] mukaan Dyneeman tiheys on 975 kg/m^3 ja vetolujuus on noin 3 GPa . Kun tuulen maksiminopeudeksi valitaan 18 m/s , saadaan KiteGen-prototyypin köyden halkaisijaksi noin $5,6 \text{ mm}$ ja pituusmassaksi noin $0,024 \text{ kg/m}$. Köydensuuntaisen aerodynaamisen voiman laskemiseen tarvitaan vielä arvo kitkakertoimelle C_{\parallel} , jona voidaan käyttää lähteessä [7] mainittua tyypillistä arvoa $0,02$.

Edelliset tiedot eivät vielä riitä tehokaavassa olevien keskipakoisvoimatermien laskemiseen, sillä keskipakoisvoimien laskemiseksi kaavojen (4.21) ja (4.22) avulla on tiedettävä leijan lentorata sekä yhden kierroksen kiertämiseen kuluva aika. Määritellään tässä esimerkissä makaavan kahdeksikon näköinen lentorata yhtälöillä

$$\theta(\tau) = \theta_* + \Delta\theta \sin(2\tau) \quad \text{ja} \quad \phi(\tau) = \Delta\phi \sin(\tau), \quad (5.5)$$

joissa vaiheparametri τ kasvaa nolasta arvoon 2π yhden kierroksen aikana ja parametrit $\Delta\theta$ ja $\Delta\phi$ kuvaavat kahdeksikon laajuutta eri suunnissa. Parametrin θ_* arvoksi tässä esimerkissä on jo kerrottu 70° eli radiaaneina $\frac{7}{18}\pi$, ja olkoon tässä esimerkissä $\Delta\theta$ viisi astetta eli radiaaneina $\frac{1}{36}\pi$ ja $\Delta\phi$ 20 astetta eli radiaaneina $\frac{1}{9}\pi$. Näin kahdeksikossa korkeuskulman vaihtelu on kymmenen astetta, ja vaakasuunnassa kahdeksikon leveys on 40 astetta. Esimerkilaskussa käytetyt eri suureiden arvot on koottu taulukkoon 5.1.

Yhteen leijan lentämään kahdeksikkoon kuluvan ajan T laskemiseksi tarvitaan

Suure	Symboli	Arvo
Leijan siipipinta-ala	A	5 m ²
Leijan massa	m	2,5 kg
Leijan nostovoimakertoin	C_L	1,2
Leijan aerodynaaminen tehokkuus	G_e	8
Ilman tiheys	ρ_a	1,2 kg/m ³
Putoamiskiihtyvyys	g	9,81 m/s ²
Tuulen nopeus	V	12 m/s
Lentoradan keskimääräinen korkeuskulma	θ_*	70°
Köyden keskimääräinen pituus	r_*	290 m
Köyden vapautusnopeus	V_L	1,5 m/s
Köyden vapautusnopeuserroin (laskettu)	v_L	0,13
Köysimateriaalin vetolujuus	σ	3 GPa
Köysimateriaalin tiheys	ρ_l	975 kg/m ³
Köyden kestävä maksimituuli	V_{\max}	18 m/s
Köyden halkaisija (laskettu)	d^{line}	5,6 mm
Köyden pituusmassa (laskettu)	μ	0,024 kg/m
Köyden aerodynaaminen kitkakerroin	C_{\parallel}	0,02
Kahdeksikkoradan korkeus	$2\Delta\theta$	10°
Kahdeksikkoradan leveys	$2\Delta\phi$	40°

Taulukko 5.1: Numeerisessa esimerkissä käytetyt suureiden arvot.

tieto lentoradan pituudesta. Lentoradan pituutta laskettaessa on köyden pituus oletettava vakioksi, sillä muuttuvan köyden pituuden esittäminen parametrin τ avulla vaatisi ajan T tietämistä. Näin lentoradan pituus l saadaan liitteessä 2 johdetun kaavan

$$l = r_* \int_0^{2\pi} \sqrt{(\theta'(\tau))^2 + \sin^2(\theta(\tau))(\phi'(\tau))^2} d\tau \quad (5.6)$$

avulla vakiopituuisella köydellä. Esimerkin tapauksessa kaava (5.6) antaa radan pituudeksi noin 563 metriä. Radan kiertämiseen kuluva aika T saadaan jakamalla radan pituus leijan keskinopeudella, eli

$$T \approx \frac{l}{G_e(V \sin(\theta_*) - V_L)}, \quad (5.7)$$

kun keskinopeutta arvioidaan leijan nopeuslain (3.29) antamalla ilmanopeuden paikakavektoria vastaan kohtisuoralla komponentilla arvion (4.25) kanssa. Näin saadaan esimerkin tapauksessa kierrosajaksi noin 7,2 sekuntia.

Nyt voidaan laskea keskipakoisvoimatermit kaavoilla (4.21) ja (4.22), joissa integroidaan ajan suhteen, eli kaavan (5.5) vaiheparametriin on tehtävä sijoitus $\tau = \frac{2\pi t}{T}$. Näin kaavoja (4.19), (4.31) ja (4.30) käyttämällä saadaan esimerkin leijavoimailan teholle arvio 33,4 kW. KiteGen-prototyypin keskimääräinen teho sähköntuotan-

toivaiheen lopun kahdeksikon ajalta on siis noin 33 kilowattia, mikä vastaa varsin tarkasti KiteGen-prototyypin esittelevässä julkaisussa [3] esitettyä sähköntuotantovaiheen lopun tehoa, jonka voi lukea simulaatioista saatua hetkellistä tehoa ajan funktiona esittävästä kuvasta 12 juuri ennen tehon romahtamista paluuvaiheen alkaessa.

Esimerkkilaskusta kannattaa myös huomioida se, että tehokaavan (4.30) kertoimen k_* arvo on noin 1,002 eli hyvin lähellä ykköstä. Näin kertoimen k_* poistaminen tehokaavasta pienentää tehoa vain noin 0,3 prosenttia, eli tehoarvion tarkkuus huomioiden mitättömän vähän. Näin voidaan päätellä, että ainakin esimerkkilaskun pienellä prototyypivoimalalla leijan ja köyden massan sekä köyden aerodynaamisen voiman vaikutus tässä leijavoimalan tehoarviossa on häviävän pieni. Näin ollen ainakin esimerkkitapauksessa leijavoimalalle saa varsin hyvän tehoarvion yksinkertaisesti kaavalla

$$\langle P \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a A C_L v_L (1 - v_L)^2 G_e \sqrt{G_e^2 + 1} V^3 \sin^3 \theta_*, \quad (5.8)$$

joka saadaan kaavasta (4.30) sijoittamalla paikoilleen kerroin k_0 ja arvioimalla kerrointa k_* ykkösellä. Tätäkin kaavaa voisi suuremmilla aerodynaamisen tehokkuuden arvoilla lyhentää lisää arviolla

$$G_e \sqrt{G_e^2 + 1} \approx G_e^2,$$

joka esimerkin tapauksessa aiheuttaa vain noin 0,8 prosenttia kaavaa (5.8) pienemmän tehon. Näin yksinkertainen tehokaava

$$\langle P \rangle \approx \frac{1}{2} \rho_a A C_L v_L (1 - v_L)^2 G_e^2 V^3 \sin^3 \theta_* \quad (5.9)$$

antaa esimerkissä tehoksi noin 33,0 kW, joka on vain noin 1,1 prosenttia kaavan (4.30) antamaa tehoa pienempi.

Vastaavasti optimaalisella köyden vapautusnopeudella saatavan tehon kertovan kaavan (4.40) yksinkertaistetuksi versioksi saadaan

$$\langle P_{\max} \rangle \approx \frac{2}{27} \rho_a A C_L G_e^2 V^3 \sin^3 \theta_*. \quad (5.10)$$

Esimerkin tapauksessa optimaalisen köyden vapautusnopeuden kaava (4.40) antaa tehoksi 49,7 kW ja yksinkertaistettu kaava (5.10) antaa 48,9 kW, mikä on noin 1,5 vähemmän. Näin ollen KiteGen-prototyyppi ei toiminut simulaatiossa läheskään optimaalisella teholla.

6. YHTEENVETO

Tässä työssä johdettu leijavoimalan tehokaava kertoo arvion yksileijaisen leijavoimalan mekaaniselle teholle sähköntuotantovaiheen aikana, kunhan leija on aerodynaamisesti tehokas ja leijan annetaan lentää mahdollisimman nopeasti tehon maksimoimiseksi. Tehokaavan versio (4.30) kertoo leijavoimalan tehon erilaisilla köyden vapautusnopeuksilla ja versio (4.40) kertoo suurimman saatavissa olevan tehon optimoidulla kaavan (4.39) mukaisella köyden vapautusnopeudella. Näitä tehokaavoja käytettäessä täytyy laskea kaavoissa esiintyvät voimakomponentit kaavojen (4.19), (4.21), (4.22) ja (4.31) avulla, joten tehon laskeminen ei ole vielä aivan yksinkertaista. Näiden erikseen laskettavien voimakomponenttien merkitys on kuitenkin yleensä varsin pieni, joten lähes yhtä hyvän arvion leijavoimalan teholle saa helposti työn lopussa esitetyillä tehokaavan yksinkertaistetuilla versioilla, joista kaava (5.9) toimii eri köyden vapautusnopeuksilla ja kaava (5.10) kertoo optimitehon. Näin leijavoimalan tehon arvioiminen on mahdollisimman yksinkertaista.

Yksinkertaistetun tehokaavan mukaan leijavoimalan teho kasvaa lineaarisesti leijan pinta-alaa suurennettaessa, neliöllisesti leijan aerodynaamisesta tehokkuutta parannettaessa ja kuutiollisesti tuulen nopeuden lisääntyessä. Näin siis leijasta kannattaa tehdä mahdollisimman virtaviivainen ilmanvastuksen minimoimiseksi ja tehon maksimoimiseksi, eikä leijan nostovoimakerrointa juurikaan kannata kasvattaa aerodynaamisen tehokkuuden kustannuksella, sillä teho kasvaa vain lineaarisesti nostovoimakertoimen mukana. Perinteisistä tuulivoimaloistakin tuttu tehon kuutiollinen kasvu tuulennopeuden mukana taas korostaa merkittävästi leijan avulla saavutettavien korkealla puhaltavien voimakkaampien ja vakaampien tuulien tarjoamaa tehoetua perinteisiin tuulivoimaloihin verrattuna.

Tehokaavojen lisäksi hyödyllisiä tuloksia ovat ainakin leijan aerodynaamisen tehokkuuden merkityksen kertova leijan nopeuslaki (3.29), köyden huomioiva leijan aerodynaamisen tehokkuuden laskukaava (3.41) sekä optimaalisen köyden vapautusnopeuden kertova kaava (4.38). Leijan nopeuslaki kertoo ilmanopeuden, jonka leija pyrkii keräämään lentäessään tuuleen nähden poikittain. Kaava (3.41) puolestaan kertoo nopeuslaissa esiintyvän leijan ja köyden yhdistelmän aerodynaamisen tehokkuuden, kun leijan aerodynaamiset ominaisuudet ja köyden mitat tiedetään. Optimaalisen köyden vapautusnopeuden tietäminen puolestaan helpottaa leijavoimalasta saatavan tehon maksimoimista.

Kaikki tämän työn tulokset arvioivat suureiden keskiarvoja yhden leijan lentämän kierroksen ajalta, sillä tarkoituksena on yksinkertaisen tehoarvion johtaminen eikä leijavoimalan mekaniikan ja ominaisuuksien yksityiskohtainen tarkasteleminen. Tehoarvion tarkentaminen vaatisi hetkellisten suureiden käsittelemistä, mutta hetkellisiä suureita tarkasteltaessa ei olisi voinut tehdä joitakin tämän työn tulosten johtamisessa välttämättömiä yksinkertaistuksia. Leijavoimalan mekaniikkaa täytyisi tarkastella huomattavasti tarkemmin, jotta voisi käsitellä esimerkiksi leijan nopeuden vaihtelua lentoradan eri kohdissa.

Kaikki tämän työn tulokset on johdettu yksinkertaisen voimatasapainoon perustuvan tarkastelun avulla, joten kaikkia massahitauten vaikutuksia ei ole huomioitu. Myöskään leijan tasapainoa ja kohtauskulman vaihtelua ei käsitellä tässä yksinkertaisessa mallissa, joten kohtauskulman mukana muuttuvat leijan aerodynaamiset ominaisuudet jäävät huomioimatta. Näin tämän työn menetelmillä ei voi tarkastella esimerkiksi leijan ohjaamiseen tarvittavia voimia tai leijan ja köyden massasta ja tuulen suunnan vaihtelusta aiheutuvia leijan nopeuden muutoksia leijan lentoradan eri osissa. Niinpä tämän työn tulosten perusteella ei esimerkiksi voi päätellä pienintä tuulen nopeutta, jolla leija pysyy hallitusti ilmassa.

Yksi tämän työn tehoarvion merkittävä rajoitus liittyy leijavoimalan jaksottaisen toiminnan toisen vaiheen eli paluuvaiheen käsittelyn puuttumiseen. Näin tämän työn tehokaava ei kerro leijavoimalasta saatavaa pitkän aikavälin kokonaistehoa, joka on paluuvaiheessa välttämättä menetettävän energian ja paluuvaiheeseen kuluvan ajan takia enemmän tai vähemmän merkittävästi tehokaavan kertomaa sähköntuotantovaiheen aikaista tehoa pienempi. Paluuvaiheen energiahäviön ja paluuvaiheen vaatiman ajan minimoiminen ovatkin leijavoimalan suunnittelun ja optimoinnin kannalta oleellisia kysymyksiä, joiden tutkiminen on muunkin leijavoimalatutkimuksen tavoin maailmanlaajuisesti vasta alussa. Mahdollisesti kaikkia leijavoimalan tarjoamia mahdollisuuksia ei ole vielä edes keksitty.

LÄHTEET

- [1] Loyd, M.L. Crosswind kite power. *Journal of Energy* 4(1980)3, pp. 106–111.
- [2] Canale, M., Fagiano, L., Ippolito, M., Milanese M. Control of tethered airfoils for a new class of wind energy generator. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, Dec. 13-15, 2006. pp. 4020–4026. Available at <http://www.kitegen.com/pdf/IEEE200611.pdf>.
- [3] Canale, M., Fagiano, L., Milanese M. Power kites for wind energy generation. *IEEE Control Systems Magazine* 27(2007)6, pp. 25–38. Available at <http://www.kitegen.com/pdf/IEEECSM200712.pdf>.
- [4] Argatov, I., Rautakorpi, P., Silvennoinen, R. Estimation of the mechanical energy output of the kite wind generator. Tampere University of Technology 2008. Submitted to the *Renewable Energy, An International Journal*, Elsevier. 19 p.
- [5] Laine, S., Hoffren, J., Renko, K. *Lentokoneen aerodynamiikka ja lentomekaniikka*. Helsinki 2006, WSOY. 434 s.
- [6] Hoerner, S.F. *Fluid-Dynamic Drag*. New Jersey 1965, Hoerner Fluid Dynamics. 444 p.
- [7] Hobbs, S.E. A quantitative study of kite performance in natural wind with application to kite anemometry. PhD thesis. Cranfield 1986. Cranfield Institute of Technology, Ecological Physics Research Group. Available at <https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/bitstream/1826/918/2/sehphd2a.pdf>.
- [8] Properties of Selected Fibres [WWW]. [Viitattu 21.8.2008]. Saatavissa: <http://www.mse.mtu.edu/~drjohn/my4150/props.html>.
- [9] About Dyneema [WWW]. [Viitattu 21.8.2008]. Saatavissa: <http://www.ssgloves.com/html/techinfo-no04.html>.

LIITE 1: NOPEUS, KIIHTYVYYS JA NEWTONIN TOINEN LAKI PALLOKOORDINAATISTOSSA

Tässä liitteessä johdetaan nopeusvektorille, kiihtyvyysvektorille ja Newtonin toiselle laille komponenttiesitykset pallokoordinaatiston paikallisessa kannassa. Liitteen lopuksi esitetään paikkavektorin suuntaiseen liikeyhtälöön ilmestyvä keskipakoisvoimatermi, joten tässä liitteessä johdetaan kaava pallokoordinaatiston käyräviivaisuudesta aiheutuvalla keskipakoisvoimalla.

Lähdetään liikkeelle kaavassa (3.2) määritellystä paikkavektorin esityksestä pallokoordinaateissa

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{k}},$$

josta saadaan eri koordinaattien suhteen derivoimalla ja normeeraamalla kaavassa (3.3) esitetyt paikalliset yksikkövektorit

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_r &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\|} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}, \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\|} = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}} \quad \text{ja} \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|} = -\sin \phi \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Lasketaan sitten paikallisten yksikkövektorien derivaatat eri koordinaattien suhteen ja esitetään ne paikallisten yksikkövektorien avulla, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} &= -\sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{j}} = \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} &= -\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} - \cos \theta \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{e}}_r, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \phi} &= -\cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{j}} = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad \text{ja} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} &= -\cos \phi \hat{\mathbf{i}} - \sin \phi \hat{\mathbf{j}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta.\end{aligned}$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus voidaan osoittaa esimerkiksi sijoittamalla vektorien $\hat{\mathbf{e}}_r$ ja $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ esitykset karteesisessa koordinaatistossa ja sieventämällä. Toisaalta vektorien $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ ja $\hat{\mathbf{k}}$ muodostamassa kannassa esitetyt vektorit saa muunnetuksi pallokoordinaatis-

ton paikalliseen kantaan koordinaatistonmuunnosmatriisin (3.4) käänteismatriisilla kertomalla.

Esitetään nyt paikkavektori muodossa

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r$$

ja merkitään aikaderivaattoja lyhyesti pisteellä. Näin saadaan nopeusvektoriksi

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r,$$

missä vektorin $\hat{\mathbf{e}}_r$ aikaderivaataksi saadaan ketjusäännöllä

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} \dot{\phi} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

Näin saadaan nopeusvektorin esitykseksi pallokoordinaatiston paikallisessa kannassa

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

Derivoidaan sitten toisenkin kerran ajan suhteen, jolloin saadaan kiihtyvyysvektoriksi

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + 2\dot{r} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r + r \ddot{\hat{\mathbf{e}}}_r,$$

missä vektorin $\hat{\mathbf{e}}_r$ toiseksi aikaderivaataksi saadaan ensimmäisen aikaderivaatan kaavaa derivoimalla

$$\ddot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \ddot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\theta} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta + \ddot{\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi + \dot{\phi} (\dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + \sin \theta \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\phi).$$

Näin siis tarvitaan vektorin $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ aikaderivaatta

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \phi} \dot{\phi} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

sekä vektorin $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ aikaderivaatta

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\phi = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} \dot{\phi} = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Kun kaikki kantavektorien aikaderivaatat sijoitetaan paikoilleen ja sievennetään, saadaan kiihtyvyysvektorin esitykseksi pallokoordinaatiston paikallisessa kannassa

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi. \end{aligned}$$

Olkoon nyt leijaan tai johonkin muuhun kappaleeseen vaikuttavien todellisten voimien resultantti \mathbf{F}^{tot} ja kappaleen massa m , jolloin Newtonin toinen laki on

$$\mathbf{F}^{\text{tot}} = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

Jaetaan nyt kokonaisvoima \mathbf{F}^{tot} komponenteiksi

$$\mathbf{F}^{\text{tot}} = F_r^{\text{tot}} \hat{\mathbf{e}}_r + F_\theta^{\text{tot}} \hat{\mathbf{e}}_\theta + F_\phi^{\text{tot}} \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

jolloin voidaan kiihtyvyysektorin komponenttiesityksen avulla jakaa Newtonin toinen laki pallokoordinaatiston paikallisten kantavektorien suuntaiseksi yhtälöiksi

$$\begin{aligned} F_r^{\text{tot}} &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta), \\ F_\theta^{\text{tot}} &= m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \quad \text{ja} \\ F_\phi^{\text{tot}} &= m(2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta). \end{aligned}$$

Näistä yhtälöistä tässä työssä tarvitaan vain paikkavektorin suuntaista yhtälöä erikoistapauksessa, jossa \ddot{r} on nolla, eli leijan köyden vapautusnopeus on vakio. Tässä tapauksessa paikkavektorin suuntainen liikeyhtälö tai paremminkin voimatasapainoyhtälö on siis

$$F_r^{\text{tot}} = -mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta).$$

Näin leijaan vaikuttavien todellisten voimien joukkoon on lisättävä keskipakoisvoimaksi kutsuttava näennäinen voima F^{cf} , jotta voimatasapainoyhtälö saisi tutun muodon

$$F_r^{\text{tot}} + F^{\text{cf}} = 0.$$

Tämä yhtälö pätee siis vain keskipakoisvoiman suuruuden ollessa

$$F^{\text{cf}} = mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta),$$

ja keskipakoisvoiman vaikuttaessa vektorin $\hat{\mathbf{e}}_r$ suuntaisesti. Tätä keskipakoisvoiman kaavaa on käytetty sellaisenaan leijalle kaavassa (4.13) ja köydenpalaselle sovelletuna kaavassa (4.4).

LIITE 2: LENTORADAN PITUUDEN LASKEMINEN

Tässä liitteessä johdetaan leijan lentoradan pituuden laskukaava vakiopituisen köyden tapauksessa, eli kaava (5.6).

Kirjoitetaan aluksi liitteessä 1 johdettu leijan nopeusvektorin esitys pallokoordinaatiston paikallisessa kannassa uudelleen käyttämällä aikaderivaatoille pisteen sijasta tavallista derivaattamerkintää, eli saadaan

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \frac{d\phi}{dt} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

Tästä saadaan leijan paikkavektorin differentiaaliksi

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \sin(\theta) d\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

joka sieventyy köyden pituuden pysyessä vakiona muotoon

$$d\mathbf{r} = r d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + r \sin(\theta) d\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

paikkavektorin pituuden muutoksen dr ollessa nolla.

Nyt leijan lentoradan pituusalkio dl on paikkavektorin differentiaalinen normi, joten saadaan

$$dl = \|d\mathbf{r}\| = \sqrt{r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2(\theta)(d\phi)^2}.$$

Koska leijan paikkavektorin pituus r on aina positiivinen, saadaan

$$dl = r \sqrt{(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2}.$$

Oletetaan nyt, että leijan lentorata on määritelty vaiheparametrin τ funktiona yhtälöillä

$$\theta = \theta(\tau) \quad \text{ja} \quad \phi = \phi(\tau),$$

jolloin saadaan kulmien differentiaaleiksi ketjusäännöllä

$$d\theta = \theta'(\tau) d\tau \quad \text{ja} \quad d\phi = \phi'(\tau) d\tau.$$

Tässä derivaatan pilkku tarkoittaa luonnollisesti derivointia vaiheparametrin τ suhteen.

Kun kulmien differentiaalit sijoitetaan radan pituusalkion kaavaan ja oletetaan

vaiheparametri τ kasvavaksi, saadaan leijan lentoradan pituusalkioksi

$$dl = r\sqrt{(\theta'(\tau))^2 + \sin^2(\theta(\tau))(\phi'(\tau))^2} d\tau.$$

Oletetaan nyt, että vaiheparametri τ kasvaa yhden kierroksen aikana nolasta arvoon 2π . Näin saadaan leijan lentoradan pituudeksi

$$l = \oint dl = r_* \int_0^{2\pi} \sqrt{(\theta'(\tau))^2 + \sin^2(\theta(\tau))(\phi'(\tau))^2} d\tau$$

etäisyyden r pysyessä vakiona arvossa r_* . Näin kaava (5.6) on johdettu.