TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen osasto

OUTI JAATINEN

SUMEUDEN MATEMAATTISEN TEORIAN PERUSTEITA ULRICH HÖHLEN MUKAAN

DIPLOMITYÖ

Aihe hyväksytty osastoneuvoston
kokouksessa 9.3.2005.
Tarkastaja: Professori Esko Turunen

Alkusanat

Sain loistavan tilaisuuden tehdä diplomityöni Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella kesätyönä tutkimusapulaisen roolissa. Suuri kiitos kuuluu ohjaajalleni professori Esko Turuselle avusta diplomityön aiheen valinnassa, arvokkaista neuvoista ja valtavasta vainvannäöstä. Laitoksen väelle kuuluu kiitos kaikesta saamastani ystävällisestä avusta käytännön ongelmissa sekä mahdollisuudesta keskittyä diplomityön tekoon.

Miska: kiitos!

Tampereella 21.09.2005

Outi Jaatinen

Sarvijaakonkatu 12 a 27
33540 Tampere
outi.jaatinen@tut.fi

Sisältö

Tiivistelmä

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Teknis-luonnontieteellinen osasto
Matematiikan laitos

Jaatinen, Outi: Sumeuden matemaattisen teorian perusteita Ulrich Höhlen mukaan

Diplomityö, 72 sivua ja 7 liitesivua
Tarkastaja: Professori Esko Turunen
Lokakuu 2005
Avainsanat: kommutatiivinen, residuoitu l-monoidi, uskottavuusteoria, monoidinen logiikka, sumea säätöteoria

Sumeiden joukkojen teoria sekä sumea logiikka ovat perinteisten joukkojen ja todennäköisyysteorian yleistyksiä. Ne kuvaavat käsitteitä, joiden kuuluminen tiettyyn joukkoon on epäselvää tai osittaista sekä ilmiöitä, joiden ilmeneminen on epämääräistä. Tässä diplomityössä perehdytään sumean logiikan keskeisiin rakenteisiin eli kommutatiivisiin, residuoituihin l-monoideihin sekä niiden käyttöön sumean logiikan karakterisoinnissa. Perinteinen todennäköisyysteoria laajennetaan uskottavuusteoriaksi ja perinteinen logiikka monoidiseksi, epäklassiseksi logiikaksi. Työssä tehdään katsaus myös sumeaan säätöteoriaan ja sen matemaattiseen semantiikkaan.

Yksi sumean logiikan keskeisistä työkaluista on kategoriateoria. Kategoria voidaan yksinkertaistettuna ajatella joukkojen (objektien) sekä kuvausten (nuolten) muodostamaksi systeemiksi. Kategoriateoriaan perehdytään tämän diplomityön yhteydessä varsin pintapuolisesti, kuitenkin niin, että lukija saa käyttöönsä tarvittavan peruskäsitteistön.

Tämä diplomityö perustuu ensisijaisesti Ulrich Höhlen artikkeliin *On the fundamentals of fuzzy set theory.*

Abstract

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Department of Science and Engineering
Institute of Mathematics

Jaatinen, Outi: Mathematical foundations of fuzzyness according to Ulrich Höhle

Masters Thesis, 72 pages and 7 appendix pages
Examiner: Professor Esko Turunen
October 2005
Keywords: commutative, residuated l-monoid, plausibility theory,
monoidal logic, fuzzy control theory

Fuzzy set theory and fuzzy logic are generalizations of classic sets and probability theory. Their function is to describe objects that are only partially in a given set or it is difficult to say, whether that object in fact is in a given set. Also, fuzzy logic characterizes phenomena or environments which are uncertain. In this masters thesis we study commutative, residuated l-monoids and how they help us to characterize fuzzy environments. We will extend classical probability to plausibility theory and classical logic to monoidal, non-classical logic. We will also take a look at fuzzy control theory and its mathematical semantics.

One of the basic tools in fuzzy logic is category theory. Simplified, a category can be viewed as a system that consists of sets (objects) and maps (arrows), and it can be described as a diagram. Here we will only define some very basic concepts just to give the reader the needed tools for the presented theories.

This masters thesis is mainly based on the article *On the fundamentals of fuzzy set theory* by Ulrich Höhle.

Merkinnät ja lyhenteet

$\Rightarrow$	Implikaatio
$\Leftrightarrow$	Ekvivalenssi
$\forall$	Kaikilla-kvanttori
$\exists$	Olemassaolokvanttori
$\in$	Sisältyminen
$\subseteq$	Osajoukko
$\subset$	Aito osajoukko
$\leq$	Järjestysrelaatio
$\sim$	Ekvivalenssirelaatio
$\bigvee\{x \mid x \in X\}$	Joukon $X \subseteq A$ pienin yläraja
$x \vee y$	Joukon $\{x, y\}$ pienin yläraja
$\bigwedge\{x \mid x \in X\}$	Joukon $X \subseteq A$ suurin alaraja
$x \wedge y$	Joukon $\{x, y\}$ suurin alaraja
sup	Supremum
inf	Infimum
$(L, \leq), (L, \leq, \wedge, \vee)$	Lattiisi
$\mathbf{0}$	Pienin alkio, nolla-alkio
$\mathbf{1}$	Suurin alkio, identiteettialkio
$'$	Komplementtioperaatio, järjestyksenvaihtaja
$(L, \leq, \wedge, \vee, ')$	Boolen algebra
$\emptyset$	Tyhjä joukko
$\rightarrow$	Residuumi
$\leftrightarrow$	Biresiduumi
$h : X \mapsto Y$	Kuvaus h määrittelyjoukosta X maalijoukkoon Y
$*$	Binäärinen operaatio
$(L, \leq, *)$	Residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi
$\Box$	Todistus päättyy tähän
$X \times X \times \cdots$	Tulojoukko
$\bigcup$	Yhdiste
$\bigcap$	Leikkaus

ω	Realisaatio
μ	Uskottavuusmitta
$\mathfrak{R}(L)$	Realisaatioiden ω joukko
$\mathscr{L}$	Formaalinen kieli
$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$	Formaalisen kielen aakkosia
$v \in \mathbb{V}$	Hyvin määritelty formula
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	Alkioita, formuloita
$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \otimes$	Monoidisen logiikan loogiset symbolit
$\vdash \alpha$	Formula α on todistuva
$\rhd$	Hyvin määriteltyjen formuloiden esijärjestys
$\models_M \alpha$	Formula α on M-käypä
$[\![\, , \,]\!]$	Identiteetin predikaattisymboli
e	Olemassaolon ulottuvuuden predikaattisymboli
SC	Lauselogiikka (sentential calculus)
PC	Predikaattilogiikka (predicate calculus)
MV	Many valued
GL	Generalized logics
MP	Modus Ponens
ŁPC^*	Modifioitu Łukasiewiczin predikaattilogiikka
cl-monoidi	täydellinen (complete) l-monoidi
$\mathfrak{IE}$	Identiteetin ja olemassaolon formaalinen teoria

Luku 1

Johdanto

Pirkanmaan kirjastojen PIKI-verkkokirjaston käyttäjälle sumeus on saattanut huomaamatta osua kohdalle. Asiasanahaun "sumee logiikka"tuloksena käyttäjä saa ilmoituksen: "Antamallasi hakutekijällä sumee logiikka ei löytynyt yhtään teosta. Sumean haun ehdottamalla hakutekijällä sumea logiikka löytyivät teokset ..."

Vuonna 1965 L. A. Zadeh [12] esitti sumeiden joukkojen teorian vaihtoehtona todennäköisyysteorialle. Sumeiden joukkojen teoria käsittelee ilmiöitä, joissa alkion kuuluminen tiettyyn joukkoon on epämääräistä, epäselvää, osittaista. Onko nainen kaunis? Onko hän nuori vai vanha? Kenties jotain siltä väliltä? Onko hän lihava, ei-lihava, ei-laiha vai laiha? Reaalimaailmassa esiintyvien ei-hyvinmääriteltyjen käsitteiden vuoksi on matematiikassa päädytty sumeiden joukkojen teoriaan.

Zadehin alkuperäisen määritelmän mukaan *sumeaa joukkoa* (*fuzzy set*) $A \subseteq X$ karakterisoidaan *jäsenyysfunktiolla* f_a (*membership function, characteristic function*), joka liittää alkion $x \in X$ reaalilukuun yksikkövälillä $[0, 1]$. *Jäsenyysaste*, funktion $f_a(x)$ arvo pisteessä x, kertoo alkion x kuulumisen asteen sumeaan joukkoon A. Perinteisessä mielessä jäsenyysaste voi saada vain arvot 1 tai 0 riippuen siitä, kuuluuko alkio tiettyyn joukkoon vai ei. Sumeuden alueella liikuttaessa nainen voi kuulua joukkoon *kauniit naiset* jäsenyysasteella $0,6$ tai $0,999$. Kauneus voidaan määritellä kompleksisemmin kuin vain jaolla kaunis – ei-kaunis.

Sumean joukon teoriaa on vuosien aikana muunneltu ja paranneltu. Zadehin alkuperäinen määritelmä jättää avoimia kysymyksiä. Mitä karakterisoidaan ja millä perusteella? Ovatko sumeat osajoukot ja lattiisiarvoiset kuvaukset sama asia? Onko olemassa matemaattinen perustelu sille, että lattiisiarvoiset kuvaukset nimetään yleisiksi karakteristisiksi funktioiksi? [3]

Tämä diplomityö perustuu ensisijaisesti Ulrich Höhlen artikkeleihin *Commutative, residuated l-monoids* [4], *Presheaves over GL-monoids* [5] sekä *On the Fundamentals of Fuzzy set Theory* [3]. Höhle laajentaa perinteisen todennäköisyysteorian uskottavuusteoriaksi: Kolmogorovin aksioomat vaidaan yleistää sumeille joukoille sopiviksi. Lisäksi Boolen logiikan aksioomaskeemat yleistetään monoidisen logiikan aksioomiksi ja näin perinteinen logiikka yleistyy sumeaksi logiikaksi.

Työssä on seuraavat peruslähtökohdat:

- Kommutatiiviset, residuoidut l-monoidit
- Uskottavuusteoria
- Epäklassinen malliteoria

Sumean logiikan olennaisiin rakentaisiin eli lattiiseihin perehdytään luvussa 2. Erityisesti tarkastelun kohteena ovat kommutatiiviset, residuoidut l-monoidit eli residuoidut lattiisit. Uskottavuusteoriaa ja epäklassista malliteoriaa käsitellään omissa luvuissaan. Molemmissa lattiisiarvoiset kuvaukset ovat olennaisessa osassa. Epäklassisessa malliteoriassa tehdään katsaus lause- ja predikaattilogiikkaan. Merkinnöissä on läpi diplomityön noudatettu Höhlen käyttämää notaatiota. Luvut 3, 4 ja 5 noudattavat hyvin pitkälle Höhlen artikkelia [3]. Todistuksia on täydennetty ja lisätty sekä määritelmiä täsmennetty. Höhlen artikkeleita [4] ja [5] on soveltuvilta osin käytetty kokoamaan käsitteistöä ja perustyökaluja luvussa 2. Työssä keskitytään sumeiden joukkojen logiikan teoreettisiin perusominaisuuksiin, erityisesti matemaattiseen semantiikkaan.

Diplomityön tarkoituksena on esittää täsmällisesti edellä esitettyihin rakenteisiin liityvät matemaattiset taustat. Tuloksia sovelletaan sumeiden joukkojen avoimiin ongelmiin, kuten sumeaan säätöteoriaan, jota käsitellään omassa luvussaan. Diplomityö on lähtökohtaisesti kirjoitettu niin, että myös sumeaa logiikkaa tuntematon lukija voi sen ymmärtää. Tästä syystä omana liitteenään on itsenäinen, joskin melko tiivis esitys kategoriateoriasta. Höhlen esityksessä kategoriateoria on luonteva työkalu sumeiden joukkojen karakterisoinnissa, joten sen perusteet on syytä selvittää tämän diplomityön yhteydessä. Kategoriateorian osalta pääasiallisena lähteinä ovat [7] sekä [6].

Luku 2

Perusmääritelmiä

Lattiisi (*lattice*) on yksi sumen logiikan tärkeimmistä algebraalisista rakenteista. Ilman perusymmärrystä lattiiseihin liittyvistä rakenteista, niiden ominaisuuksista tai niissä määritetyista operaatioista on mahdoton mallintaa sumeita ilmiöitä ja etsiä niille matemaattista relevanssia. Tässä luvussa tehdään katsaus perusmääritelmiin sekä perusrakenteisiin ja niiden ominaisuuksiin. Pyrkimyksenä on rakentaa käsitteistö ja esittää niihin liittyvät tärkeimmät tulokset, joiden merkitys tulee ilmi myöhemmissä luvuissa. Niissä erityiseti residuoidutlattiisit sekä lattiisiarvoiset kuvaukset määrittelevät osaltaan sumeita joukkoja sekä niiden ominaisuuksia. Luvun 2.1 lähteinä ovat [11] sekä [9]. Lukujen 2.2, 2.4 ja 2.5 lähteenä on [4] ellei toisin ole mainittu ja luvun 2.3 lähteenä [5].

2.1 Lattiisit ja ekvivalenssirelaatiot

Moniarvologiikassa järjestys, ekvivalenssirelaatiot sekä lattiisit ovat tärkeässä roolissa. Sumeassa logiikassa totuusarvo voi vaihdella täysin todesta täysin epätoteen, jolloin ne voidaan jollakin lailla järjestää. Esimerkiksi järjestys epätosi $<$ ehkä epätosi $<$ tuntematon $<$ ehkä tosi $<$ tosi tuntuu luonnolliselta [11].

Olkoon A ei-tyhjä joukko. *Binäärinen relaatio* R, joka on määritelty joukossa A, on tulojoukon $A \times A$ osajoukko. Jos pari (x, y) on joukon R alkio, merkitään sitä xRy. Jos kaikille $x, y, z \in A$ pätee

- xRx, relaation R sanotaan olevan *refleksiivinen*,

- jos xRy ja yRz, niin xRz, relaation R sanotaan olevan *transitiivinen*,
- jos xRy ja yRx, niin $x = y$, relaation R sanotaan olevan *antisymmetrinen*,
- jos xRy, niin yRx, relaation R sanotaan olevan *symmetrinen*.

Jos binäärinen relaatio R on sekä refleksiivinen, että transitiivinen, niin binäärinen relaatio R on joukon A *kvasi-järjestys*. Jos R on lisäksi antisymmetrinen, niin joukon A kvasi-järjestys R on (*osittainen*) *järjestys* joukossa A. Jos R on symmetrinen, niin joukon A kvasi-järjestys R on *ekvivalenssirelaatio* A:ssa.

Ekvivalenssirelaatiota merkitään yleensä symbolilla $\sim$ ja ei-symmetristä kvasi-järjestystä symbolilla $\leq$. Esimerkiksi reaalilukujen joukossa määritelty luonnollinen järjestysrelaatio $\leq$ on selvästi antisymmetrinen kvasi-järjestys joukossa $\mathbb{R}$. Joukkoa A, jossa on määritelty järjestysrelaatio $\leq$, sanotaan *osittain järjestetyksi joukoksi* (*partially ordered set* eli *poset*). Jos osittain järjestetyssä joukossa A aina joko $x \leq y$ tai $y \leq x$ kaikilla $x, y \in A$, niin A on *ketju* ja relaatio $\leq$ on *täydellinen järjestys*.

Osittain järjestetyn joukon alkio $a \in A$ on *maksimaalinen*, jos ei ole olemassa sellaista joukon A alkiota b, että $a \neq b$ ja $a \leq b$. Vastaavasti alkio $a \in A$ on *minimaalinen*, jos ei ole sellaista alkiota $b \in A$, että $b \leq a$ ja $a \leq b$. Osittain järjestetyssä joukossa voi olla useita maksimaalisia tai minimaalisia alkioita.

Olkoon A osittain järjestetty joukko ja $X \subseteq A$. Joukon X *yläraja* on sellainen alkio $a \in A$, että kaikille alkioille $x \in X$ pätee $x \leq a$. Joukon X *pienin yläraja* eli *supremum* on alkio $a \in A$, joka toteuttaa ehdot:

- $a \geq x \qquad \forall x \in X$,
- jos b on joukon X yläraja, niin $a \leq b$.

Joukon $X \subseteq A$ pienintä ylärajaa merkitään $\bigvee\{x|x \in X\}$ ja erikoisesti joukolle $\{x, y\}$ käytetään merkintää $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

Vastaavasti joukon $X \subseteq A$ *alaraja* on sellainen alkio $a \in A$, että kaikille $x \in X$ pätee $a \leq x$. Joukon X *suurin alaraja* eli *infimum* on alkio $a \in A$, joka toteuttaa ehdot:

- $a \leq x \qquad \forall x \in X$,
- jos b on joukon X alaraja, niin $a \geq b$.

Joukon $X \subseteq A$ suurinta alarajaa merkitään $\bigwedge\{x|x \in X\}$ ja erikoisesti joukolle $\{x, y\}$ käytetään merkitään $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

Lemma 2.1 (Zornin Lemma) *Jos osittain järjestetyn joukon A jokaisella ketjulla on yläraja A:ssa, niin A sisältää maksimaalisen alkion, toisin sanoen, jokaista $a \in A$ kohti on olemassa maksimaalinen alkio b siten, että $a \leq b$.*

Todistus. Sivuutetaan.

Jos osittain järjestetyssä joukossa A on alkio a siten, että $a \leq x$ kaikille $x \in A$, niin a on A:n *pienin alkio* tai *nolla* ja sitä merkitään symbolilla $\mathbf{0}$. Vastaavasti joukon A *suurin alkio* tai *yksikkö*, on alkio $b \in A$ siten, että $x \leq b$ kaikille $x \in A$. Suurinta alkiota merkitään symbolilla $\mathbf{1}$. Jokainen osittain järjestetty joukko A sisältää enintään yhden nollan ja enintään yhden yksikön.

Määritelmä 2.2 Lattiisi *eli* hila *on sellainen osittain järjestetty joukko L, että $x \wedge y$ ja $x \vee y$ ovat olemassa joukosssa L kaikille alkioille $x, y \in L$. Lattiisi L on* täydellinen, *jos $\bigvee\{x|x \in X\}$ ja $\bigwedge\{x|x \in X\}$ ovat olemassa joukossa L kaikille osajoukoille $X \subseteq L$.*

Jokainen täydellinen lattiisi L sisältää pienimmän alkion $\mathbf{0}$ ja suurimman alkion $\mathbf{1}$, kun valitaan $X = L$. Lattiisia L merkitään $(L, \leq)$ tai $(L, \leq, \wedge, \vee)$, jos halutaan painottaa lattiisioperaatioita $\wedge, \vee$.

Lattiisissa $(L, \vee, \wedge)$ voidaan binääristen operaatioiden $\vee$ ja $\wedge$ avulla määritellä järjestysrelaatio $\leq$:

- $x \leq y$ jos ja vain jos $x \vee y = y$,
- $x \leq y$ jos ja vain jos $x \wedge y = x$.

Tällöin $(L, \leq)$ on lattiisi, missä $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ja $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

Määritelmä 2.3 *Lattiisi $(L, \leq, \wedge, \vee)$ on* distributiivinen, *jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikille $x, y, z \in L$:*

- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Määritelmä 2.4 *Lattiisissa L on komplementti, jos siinä on määritelty pienin alkio $\mathbf{0}$, sekä komplementtioperaatio $'$ siten, että seuraavat identiteetit ovat voimassa:*

- $x'' = x$,
- $(x \vee y)' = x' \wedge y'$,
- $x \wedge x' = \mathbf{0}$.

Määritelmä 2.5 Boolen algebra *on distributiivinen lattiisi, jossa on määritelty komplementti. Alkio x' on alkion x* lattiisikomplementti.

Boolen algebraa merkitään $(L, \leq, \wedge, \vee, ')$.

2.2 Kommutatiiviset, residuoidut l-monoidit

Kommutatiiviset, residuoidut l-monoidit eli *residuoidut lattiisit* sekä *MV-algebrat* ovat rakenteita, jotka ovat lähtöisin tarpeesta laajentaa totuusarvojoukko kahdesta alkiosta- nollasta ja ykkösestä- useampaan [9]. Sumeiden joukkojen teoria perustuu pitkälti monoidisiin rakenteisiin. Residuoituja lattiiseja voidaan pitää sumeiden relaatioiden teorian sekä moniarvologiikan perustana. Residuoitu lattiisi pystyy yksinkertaista lattiisia paremmin mallintamaan sumeita ilmiöitä. Tässä keskitytään residuoitujen, kommutatiivisten l-monoidien ominaisuuksiin, jotka ovat oleellisia sumean logiikan matemaattisen perustan kannalta. Seuraavaksi esitettyjen tulosten lähteenä on [4] ja [5].

Määritelmä 2.6 $(L, \leq, *)$ *on residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi eli residuoitu lattiisi, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:*

- $(L, \leq)$ *on lattiisi, jolla on suurin ja pienin alkio. Lisäksi pienin alkio* $\mathbf{0} = \bigwedge \emptyset$ *on nolla-alkio ja suurin alkio* $\mathbf{1} = \bigvee \emptyset$ *on identiteettialkio;*
- $(L, *)$ *on kommutatiivinen monoidi* [1]*;*
- *Operaatio* $*$ *on isotoninen (ts. jos* $a \leq b$ *niin* $a * c \leq b * c$*);*
- *Lattiisissa* L *on olemassa binäärinen operaatio* $\rightarrow$ *siten, että kaikille* $\alpha, \beta, \gamma \in L$ *pätee*

$$\alpha * \beta \leq \gamma \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \rightarrow \gamma. \qquad (1)$$

Residuumi $\rightarrow$ voidaan siis yksikäsitteisesti määritellä aksiooman (1) avulla.

[1] Olkoon M ei-tyhjä joukko, jossa on määritelty binäärinen relaatio $\cdot$. Pari $(M, \cdot)$ on *monoidi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa

1. Assosiatiivisuus: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a, b, c \in M$,
2. Identiteettialkion olemassaolo: $\forall a \in M$, $\exists 1 \in M$ siten, että $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

[14]

Kahden kommutatiivisen, residuoidun l-monoidin välinen homomorfismi on rakenteen säilyttävä kuvaus. Toisin sanoen $h : (L_1, \leq, *_1) \mapsto (L_2, \leq, *_2)$ on homomorfismi jos ja vain jos h on lattiisihomomorfismi sekä monoidihomomorfismi, jolle pätee

$$h(\alpha \rightarrow_1 \beta) = h(\alpha) \rightarrow_2 h(\beta).$$

Seuraavassa annetaan joitakin residuoituihin, kommutatiivisiin l-monoideihin liittyviä tuloksia, joita tarvitaan jatkossa luvussa 4, kun tutustutaan epäklassiseen malliteoriaan.

Lause 2.7 *Olkoon $(L, \leq, *)$ residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Silloin seuraavat ominaisuudet pätevät.*

(2) $\alpha * (\alpha \rightarrow \beta) \leq \beta, \qquad \beta \leq \alpha \rightarrow (\alpha * \beta).$

(3) $(L, \leq, *)$ *on osittain järjestetty monoidi.*

(4) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) = (\alpha * \beta) \rightarrow \gamma.$

(5) $\alpha * (\beta \vee \gamma) = (\alpha * \beta) \vee (\alpha * \gamma).$

(6) $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma).$
$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma = (\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma).$

(7) $\alpha * (\alpha \rightarrow \beta) = \beta \Leftrightarrow \exists \gamma \in L$ *siten, että* $\alpha * \gamma = \beta.$

(8) $\alpha \rightarrow (\alpha * \beta) = \beta \Leftrightarrow \exists \gamma \in L$ *siten, että* $\alpha \rightarrow \gamma = \beta.$

Todistus. Koska $\alpha \leq \alpha$, niin aksiooman (1) perusteella

$$\beta * \alpha \leq \alpha * \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta \leq \alpha \rightarrow (\alpha * \beta)$$

ja

$$\alpha \rightarrow \beta \leq \alpha \rightarrow \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha * (\alpha \rightarrow \beta) \leq \beta,$$

joten (2) on voimassa. Jos $\alpha \leq \beta$, niin ominaisuuden (2) ja relaation $\leq$ transitiivisyyden perusteella $\alpha \leq (\gamma \rightarrow (\beta * \gamma))$. Kun sovelletaan aksioomaa (1), saadaan $\alpha * \gamma \leq \beta * \gamma$, joten $(L, \leq, *)$ on osittain järjestetty monoidi. Ominaisuuden (2) ja aksiooman (1) perusteella kaikille $\alpha, \beta, \gamma \in L$ pätee

$$\begin{aligned} & \alpha * \beta * ((\alpha * \beta) \rightarrow \gamma) \leq \gamma \\ \Leftrightarrow \quad & ((\alpha * \beta) \rightarrow \gamma) * \alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha * \beta) \rightarrow \gamma \leq \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} & \alpha * (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leq \beta \to \gamma \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha * \beta * (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leq \gamma \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha \to (\beta \to \gamma) \leq (\alpha * \beta) \to \gamma, \end{aligned}$$

joten (4) on todistettu. Jos valitaan $\delta = (\alpha * \beta) \vee (\alpha * \gamma)$, aksiooman (1) perusteella $(\beta \vee \gamma) \leq \alpha \to \delta$. Niinpä epäyhtälö $\alpha * (\beta \vee \gamma) \leq \delta$ seuraa jälleen aksioomasta (1). Ominaisuuden (3) perusteella myös epäyhtälö $\delta \leq \alpha * (\beta \vee \gamma)$ pätee. (5) on siis todistettu.

Jos $\beta \leq \gamma$, niin $\alpha \to (\beta \wedge \gamma) = \alpha \to \beta$. Lisäksi ominaisuuden (2) sekä aksiooman (1) perusteella

$$\begin{aligned} & \alpha * (\alpha \to \beta) \leq \gamma \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha \to \beta) \leq \alpha \to \gamma. \end{aligned}$$

Niinpä $\alpha \to (\beta \wedge \gamma) = \alpha \to \beta$. Kun vaihdetaan alkioiden β ja γ roolia, yhteensä saadaan yhtälö $\alpha \to (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)$. Jos $\beta \leq \alpha$, niin $(\alpha \vee \beta) \to \gamma = \alpha \to \gamma$ ja operaation $*$ isotonisuuden perusteella

$$\beta * (\alpha \to \gamma) \leq \alpha * (\alpha \to \gamma) \leq \gamma.$$

Edelleen aksiooman (1) perusteella

$$\begin{aligned} & \beta * (\alpha \to \gamma) \leq \gamma \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha \to \gamma \leq \beta \to \gamma, \end{aligned}$$

joten $(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) = \alpha \to \gamma$. Kun vaihdetaan alkioiden α ja β roolia, yhteensä saadaan

$$(\alpha \vee \beta) \to \gamma = (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma).$$

(6) on siis todistettu. (7) ja (8) seuraavat suoraan ominaisuudesta (2). $\square$

Määritelmä 2.8 *Residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi* $(L, \leq, *)$ *on* integraalinen *jos lattiisin suurin alkio* ***1*** *toimii myös identiteettialkiona binäärisen operaation* $*$ *suhteen.*

Seuraavassa on esitetty oleellisia tuloksia residuoiduille, integraalisille, l-monoideille.

Lemma 2.9 *Olkoon $M = (L, \leq, *)$ kommutatiivinen, residuoitu l-monoidi ja olkoon $\top$ monoidin M identiteettialkio ja **1** lattiisin $(L, \leq)$ suurin alkio. Olkoon lisäksi $\imath$ joukon L mielivaltainen alkio.*

Seuraavat ehdot ovat ekvivalenttisia:

$$
\begin{array}{lllll}
(9) & \imath = \top, & & & \\
(10) & \imath \leq \alpha \to \beta & \Leftrightarrow & \alpha \leq \beta, & \\
(11) & \alpha = \imath \to \alpha & \textit{kaikille} & \alpha \in L. &
\end{array}
$$

Seuraavat ehdot ovat ekvivalenttisia:

$$
\begin{array}{lllll}
(12) & (L, \leq, *) \textit{on integraalinen}, & & & \\
(13) & \boldsymbol{1} = \alpha \to \beta & \Leftrightarrow & \alpha \leq \beta, & \\
(14) & \alpha = \boldsymbol{1} \to \alpha & \textit{kaikille} & \alpha \in L. &
\end{array}
$$

Lisäksi,

$$
(15) \quad \textit{jos on olemassa } \gamma \in L \textit{ siten, että } \boldsymbol{1} * \gamma = \top, \textit{niin } \boldsymbol{1} = \top.
$$

Todistus. Selvästi (9) implikoi ehdon (10). Ominaisuuden (4) perusteella ehdosta (10) saadaan

$$
\begin{aligned}
\imath &\leq \alpha \to \beta \\
&= (\imath * \alpha) \to \beta \\
&= \imath \to (\alpha \to \beta),
\end{aligned}
$$

joten (10) implikoi ehdon (11). Jos (11) pätee, ominaisuudesta (8) seuraa

$$
\imath * \beta = \imath \to (\imath * \beta) = \beta,
$$

joten $\imath$ on l-monoidin M identiteettialkio. Niinpä (14) implikoi ehdon (9). Ehdot (12)-(14) seuraavat suoraan ehdosita (9)-(11). Ominaisuuden (3) perusteella

$$
\mathbf{1} = \mathbf{1} * \top \leq \mathbf{1} * \mathbf{1} \leq \mathbf{1}
$$

pätee. Toisaalta ehdon (15) oletuksen nojalla

$$
\mathbf{1} * (\mathbf{1} \to \top) = \top.
$$

Kerrotaan puolittain termillä **1**, jolloin saadaan

$$\mathbf{1} = \top * \mathbf{1} = \mathbf{1} * \mathbf{1} * (\mathbf{1} \to \top) = \mathbf{1} * (\mathbf{1} \to \top) = \top.$$

Ehto (15) on todistettu. □

Jokaiselle integraaliselle, residuoidulle, kommutatiiviselle l-monoidille pätee

$$\alpha * \beta \leq \alpha \wedge \beta. \tag{16}$$

Lause 2.10 *Kaikille integraalisille, residuoiduille, kommutatiivisille l-monoideille seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalenttisia.*

(17) $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha) = \mathbf{1}$. (algebraalinen, vahva De Morganin laki)
(18) $\alpha \to (\beta \vee \gamma) = (\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma)$.
(19) $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma = (\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma)$.

Todistus. Todistus on varsin työläs ja se sivuutetaan.

Lemma 2.11 *Olkoon $(L, \leq, *)$ integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi, joka toteuttaa vahvan de Morganin lain. Seuraavat ehdot ovat voimassa:*

(20) $\alpha * \beta \leq (\alpha * \alpha) \vee (\beta * \beta)$, $(\alpha * \alpha) \wedge (\beta * \beta) \leq \alpha * \beta$,
(21) $\alpha * (\beta \wedge \gamma) = (\alpha * \beta) \wedge (\alpha * \gamma)$,
(22) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

Todistus.

$$\begin{aligned}
\alpha * \beta &\leq \alpha * \beta * ((\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)) && (17)\\
&= (\alpha * \beta * (\beta \to \alpha)) \vee (\alpha * \beta * (\alpha \to \beta)) && (5)\\
&\leq (\alpha * \alpha) \vee (\beta * \beta). && (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha * \alpha) \wedge (\beta * \beta) &\leq (\alpha * \alpha) \vee (\beta * \beta)\\
&\leq ((\alpha * \alpha) \vee (\beta * \beta)) * ((\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)) && (17)\\
&= (\alpha * \alpha * (\alpha \to \beta)) \vee (\beta * \beta * (\beta \to \alpha))) && (5)\\
&\leq (\alpha * \beta) \vee (\alpha * \beta) && (2)\\
&\leq \alpha * \beta.
\end{aligned}$$

Jos $\beta \leq \gamma$, niin operaation $*$ isotonisuuden perusteella

$$(\alpha * \beta) \wedge (\alpha * \gamma) = (\alpha * \beta) = \alpha * (\beta \wedge \gamma).$$

Vastaavasti tulos saadaan tapaukselle $\gamma \leq \beta$.

Jos $\beta \leq \gamma$, niin

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = \alpha \wedge \beta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

ja ehto (22) selvästi pätee.

Ehdot (20)-(22) on siis todistettu. □

Määritelmä 2.12 *Integraalinen residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi* $(L, \leq, *)$ *on* osittuva*, jos jokaiselle parille* $(\alpha, \beta) \in L \times L,\ \beta \leq \alpha$ *on olemassa sellainen* $\gamma \in L$*, että* $\beta = \alpha * \gamma$.

Ominaisuuden (15) perusteella osittaminen on järkevää vain nimenomaan integraalisille l-monoideille. Seuraavassa on esitetty osittuvien, integraalisten l-monoidien ominaisuuksia.

Lemma 2.13 *Olkoon* $(L, \leq, *)$ *integraalinen, osittuva, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Seuraavat ehdot ovat voimassa:*

$$\begin{array}{ll} (23) & (\alpha \wedge \beta) = \alpha * (\alpha \to \beta), \\ (24) & \alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 * \beta = \alpha_1 * (\alpha_2 \to (\alpha_2 * \beta)), \\ (25) & \alpha \to (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \to \beta) * ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma). \end{array}$$

Todistus. Jos $(L, \leq, *)$ on osittuva, niin on olemassa sellainen $\gamma \in L$, että $\beta = \gamma * \alpha$, $\beta \leq \alpha$. Nyt

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \beta \\ &= \alpha * (\alpha \to \beta), && (7) \end{aligned}$$

joten ehto (23) pätee.

Jos $\alpha_1 \leq \alpha_2$, niin

$$\begin{aligned} \alpha_1 * (\alpha_2 \to (\alpha_2 * \beta)) &= \alpha_2 * (\alpha_2 \to \alpha_1) * (\alpha_2 \to (\alpha_2 * \beta)) && (7) \\ &= (\alpha_2 \to \alpha_1) * \alpha_2 * \beta && (7) \\ &= \alpha_1 * \beta, && (7) \end{aligned}$$

ja ehto (24) on voimassa. Jos (24) pätee, niin

$$\begin{aligned} (\alpha \to \beta) * ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma) &= (\alpha \to \beta) * (((\alpha \to \beta) * \alpha) \to \gamma) && (24) \\ &= (\alpha \to \beta) * ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) && (4) \\ &= (\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) && (24) \\ &= \alpha \to (\beta \wedge \gamma). && (6) \end{aligned}$$

Niinpä ehto (25) on voimassa. □

Lause 2.14 *Olkoon* $(L, \leq, *)$ *integraalinen, osittuva, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Seuraavat ominaisuudet pätevät:*

(26) Jos α on idempotentti operaation $*$ suhteen, niin $\alpha \wedge \beta = \alpha * \beta$ kaikille $\beta \in L$;

(27) $\alpha * (\beta \wedge \gamma) = (\alpha * \beta) \wedge (\alpha * \gamma)$;

(28) $\alpha * \beta \leq (\alpha * \alpha) \vee (\beta * \beta)$;

(29) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

Todistus. Jos α on idempotentti, niin

$$\begin{aligned}
\alpha * \beta &\leq \alpha \wedge \beta && (16)\\
&= \alpha * (\alpha \to \beta) && (23)\\
&= \alpha * \alpha * (\alpha * \beta) && (7)\\
&\leq \alpha * \beta, && (2)
\end{aligned}$$

joten (26) pätee. Koska $(L, \leq, *)$ on osittuva

$$\begin{aligned}
(\alpha * \beta) \wedge (\alpha * \gamma) &= \alpha * \beta * ((\alpha * \beta) \to (\alpha * \gamma)) && (23)\\
&= \alpha * \beta(\beta \to (\alpha \to (\alpha * \gamma))) && (4)\\
&= \alpha * (\beta \wedge (\alpha \to (\alpha * \gamma))) && (23)\\
&= \alpha * (\beta \wedge \gamma). && (8)
\end{aligned}$$

Ehto (27) on siis todistettu. Tarkastellaan nyt mielivaltaista paria $(\alpha, \beta) \in L \times L$. Koska $(L, \leq, *)$ on osittuva, on olemassa alkiot $\gamma_1, \gamma_2 \in L$ siten, että $\alpha = (\alpha \vee \beta) * \gamma_1$ ja $\beta = (\alpha \vee \beta) * \gamma_2$. Ominaisuuden (5) perusteella yhtälö $\alpha \vee \beta = (\alpha \vee \beta) * (\gamma_1 \vee \gamma_2)$ pätee. Nyt

$$\begin{aligned}
\alpha * \beta &= \gamma_1 * \gamma_2 * (\alpha \vee \beta) * (\alpha \vee \beta)\\
&= \gamma_1 * \gamma_2 * (\gamma_1 \vee \gamma_2) * (\alpha \vee \beta) * (\alpha \vee \beta)\\
&\leq ((\gamma_1 * \gamma_1) \vee (\gamma_2 * \gamma_2)) * (\alpha \vee \beta) * (\alpha \vee \beta)\\
&= (\alpha * \beta) \vee (\alpha * \beta),
\end{aligned}$$

joten (28) on todistettu. Ominaisuuden (29) todistus etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) &= (\beta \vee \gamma) * ((\beta \vee \gamma) \to \alpha) && (23)\\
&= \alpha && (7)\\
&= (\beta * (\beta \to \alpha)) \vee (\gamma * (\gamma \to \alpha)) && (7)\\
&= (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma). && (23)
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 2.15 *Olkoon $M = (L, \leq, *)$ integraalinen, kommutatiivinen, residuoitu l-monoidi. M on* Heyting algebra *jos $* = \wedge$.*

Korollaari 2.16 *Olkoon $M = (L, \leq, *)$ integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Jos M on osittuva ja toteuttaa vahvan de Morganin lain, niin sen kaikkien operaation $*$ suhteen idempotenttien elementtien osajoukko H_M muodostaa Heyting algebran. Lisäksi joukossa H_M määritelty residuumi vastaa monoidissa M määriteltyä residuumia $\rightarrow$.*

Todistus. Muistetaan, että symbolilla $\rightarrow$ merkitään operaatioon $*$ liittyvää residuumia ($\alpha * \beta \leq \gamma \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$). Olkoon e_1 ja e_2 idempotentteja alkioita, jolloin epäyhtälö

$$e_1 * (e_1 \rightarrow e_2) = e_1 \wedge (e_1 \rightarrow e_2) \quad \leq \quad e_2, \tag{2}$$

on voimassa. Nyt

$$\begin{aligned} & e_1 \wedge (e_1 \rightarrow e_2) \leq e_2 \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{1} = (e_1 \wedge (e_1 \rightarrow e_2)) \rightarrow e_2, && (13) \\ & \mathbf{1} = (e_1 \rightarrow e_2) \vee ((e_1 \rightarrow e_2) \rightarrow e_2). && (19) \end{aligned}$$

Edellisen perusteella yhtälö

$$(e_1 \rightarrow e_2) * \mathbf{1} = ((e_1 \rightarrow e_2) * (e_1 \rightarrow e_2)) \vee ((e_1 \rightarrow e_2) * ((e_1 \rightarrow e_2) \rightarrow e_2))$$

pätee. Koska e_2 on idempotentti, niin

$$\begin{aligned} (e_1 \rightarrow e_2) * ((e_1 \rightarrow e_2) \rightarrow e_2) &= e_2 \wedge (e_1 \rightarrow e_2) && (23) \\ &= e_2 * (e_1 \rightarrow e_2) && (26) \\ &= e_1 \rightarrow e_2 \\ &= (e_1 \rightarrow e_2) \wedge (e_1 \rightarrow e_2) \\ &= (e_1 \rightarrow e_2) * (e_1 \rightarrow e_2). \end{aligned}$$

Niinpä $(e_1 \rightarrow e_2) = (e_1 \rightarrow e_2) * (e_1 \rightarrow e_2)$. Toisin sanoen $(e_1 \rightarrow e_2)$ on idempotentti ja $\wedge = *$. $\square$

Määritelmä 2.17 *Integraalinen, kommutatiivinen, residuoitu l-monoidi $M = (L, \leq, *)$ on* Girard-monoidi, *jos kaikille $\alpha \in L$ pätee*

$$(\alpha \rightarrow \mathbf{0}) \rightarrow \mathbf{0} = \alpha \tag{30}$$

Lause 2.18 *Olkoon* $(L, \leq, *)$ *integraalinen, kommutatiivinen Girard-monoidi. Seuraavat ominaisuudet pätevät:*

$$\alpha \to \beta = (\alpha * (\beta \to \boldsymbol{0})) \to \boldsymbol{0}, \tag{31}$$
$$(\alpha \wedge \beta) \to \boldsymbol{0} = (\alpha \to \boldsymbol{0}) \vee (\beta \to \boldsymbol{0}). \tag{32}$$

Todistus. Heti nähdään, että (31) on suora seuraus ominaisuuksista (4) ja (30). Lisäksi

$$\begin{aligned} ((\alpha \to \mathbf{0}) \vee (\beta \to \mathbf{0})) \to \mathbf{0} &= ((\alpha \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}) \wedge ((\beta \to \mathbf{0})) \to \mathbf{0}) && (6)\\ &= \alpha \wedge \beta, && (30) \end{aligned}$$

joten (32) seuraa ominaisuudesta (30). □

Lemma 2.19 *Olkoon* $(L, \leq, *)$ *integraalinen, kommutatiivinen Girard-monoidi. Seuraavat ehdot ovat ekvivalenttisia:*

(33) $(L, \leq, *)$ *toteuttaa vahvan de Morganin lain,*

(34) $\alpha * (\beta \wedge \gamma) = (\alpha * \beta) \wedge (\alpha * \gamma)$.

Todistus. Olkoon $(L, \leq, *)$ integraalinen, kommutatiivinen Girard-monoidi, joka toteuttaa vahvan de Morganin lain. Ehdosta 21 nähdään välittömästi, että (33) implikoi ehdon (34). Implikaatio toiseen suuntaan saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} \alpha \to (\beta \vee \gamma) &= (\alpha * ((\beta \to \mathbf{0}) \wedge (\gamma \to \mathbf{0})) \to \mathbf{0}) && (30),(31)\\ &= ((\alpha * (\beta \to \mathbf{0})) \wedge (\alpha * (\gamma \to \mathbf{0}))) \to \mathbf{0} && (21)\\ &= ((\alpha * (\beta \to \mathbf{0})) \to \mathbf{0}) \vee ((\alpha * (\gamma \to \mathbf{0})) \to \mathbf{0}) && (19)\\ &= (\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma). && (31) \end{aligned}$$

Toisin sanoen ehto (34) toteuttaa vahvan de Morganin lain. □

Määritelmä 2.20 *Integraaliselle, residuoidulle, kommutatiiviselle l-monoidille* $(L, \leq, *)$ *on määritelty* neliöjuuri, *jos on olemassa operaatio* $S : L \mapsto L$, *joka toteuttaa ehdot*

$$S(\alpha) * S(\alpha) = \alpha, \tag{35}$$
$$\beta * \beta \leq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leq S(\alpha). \tag{36}$$

Arvosta $S(\alpha)$ käytettään myös merkintää $\alpha^{1/2}$. Neliöjuurien perusominaisuuksia on esitetty teoksessa [4].

MV-(many valued) algebran käsitteen esitti C. C. Chang vuonna 1958. MV-algebran kehittämisen taustalla oli pyrkimys todistaa Łukasiewiczin logiikan täydellisyys. MV-algebra laajentaa Boolen algebran idean yleiseen tapaukseen, jossa totuusarvo voi olla muutakin kuin tosi tai epätosi. MV-algebra on epäklassisen logiikan algebraalinen struktuuri [9] ja sen voi määritellä useilla eri tavoilla. Tässä MV-algebroja keskitytään tarkastelemaan integraalisten, residuoitujen l-monoidien kannalta Höhlen esittämän määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 2.21 *Integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi on* MV-algebra*, jos se toteuttaa seuraavan ehdon:*

$$(\alpha \to \beta) \to \beta = \alpha \vee \beta. \tag{37}$$

Lemma 2.22 *Olkoon $(L, \leq, *)$ integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalentteja.*

$$(L, \leq, *) \quad \text{on MV-algebra.} \tag{38}$$

$$(L, \leq, *) \quad \text{on osittuva Girard-monoidi.} \tag{39}$$

Todistus. Ehto (37) implikoi välittömästi, että $(\alpha \to 0) \to 0 = \alpha$ pätee kaikilla $\alpha \in L$. Niinpä $(L, \leq, *)$ on Girard-monoidi. Jos ehto (37) on voimassa ja $\alpha \leq \beta$, niin

$$\begin{aligned}
\alpha \to 0 &= (\alpha \wedge \beta) \to 0 \\
&= (\alpha \to 0) \vee (\beta \to 0) && (19) \\
&= ((\alpha \to 0) \to (\beta \to 0)) \to (\beta \to 0) && (37) \\
&= (\beta * (\alpha \to 0)) \to 0 && (4) \\
&= (\beta \to \alpha) \to (\beta \to 0) && (31) \\
&= (\beta * (\beta \to \alpha)) \to 0. && (4)
\end{aligned}$$

Tosin sanoen $\alpha = \beta * (\beta \to \alpha) = \alpha \wedge \beta$ ja $(L, \leq, *)$ on osittuva.

Todistetaan seuraavaksi implikaatio toiseen suuntaan.

$$\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) \to 0 &= (\alpha \to 0) \wedge (\beta \to 0) && (4) \\
&= (\beta \to 0) * ((\beta \to 0) \to (\alpha \to 0)) && (23) \\
&= (\beta \to 0) * (\alpha \to \beta). && (4), (31)
\end{aligned}$$

Jos $(L, \leq, *)$ on Girard-monoidi, niin $(\alpha \to 0) \to 0$ pätee, jolloin

$$\begin{aligned}
\alpha \vee \beta &= ((\beta \to 0) * (\alpha \to \beta)) \to 0 \\
&= ((\alpha \to \beta) \to (\beta \to 0) \to 0) && (4) \\
&= (\alpha \to \beta) \to \beta. && (30)
\end{aligned}$$

$(L, \leq, *)$ on siis MV-algebra.

Lause 2.23 *Jokainen MV-algebra täyttää seuraavan relaation:*

$$(40) \qquad \alpha \to (\alpha * \beta) = (\alpha \to \boldsymbol{0}) \vee \beta.$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
(\alpha \to \mathbf{0}) \vee \beta &= (\beta \to (\alpha \to \mathbf{0})) \to (\alpha \to \mathbf{0}) && (37) \\
&= ((\alpha * \beta) \to \mathbf{0})) \to (\alpha \to \mathbf{0}) && (4) \\
&= \alpha \to (\alpha * \beta). && (4), (30)
\end{aligned}$$

□

Huomautus 2.24

- Integraalinen, kommutatiivinen, residuoitu l-monoidi $(L, \leq, *)$ on Boolen algebra jos ja vain jos $(L, \leq, *)$ on MV-algebra sekä Heyting algebra. [3]
- Jokainen MV-algebra täyttää vahvan de Morganin lain.

Kommutatiivinen, residuoitu l-monoidi $(L, \leq, *)$ on täydellinen eli niin sanottu *cl-monoidi*, mikäli lattiisi $(L, \leq)$ on täydellinen. Integraalista, osittuvaa, kommutatiivista cl-monoidia kutsutaan *GL-monoidiksi*. Lyhenne GL tulee sanoista *generalized logics*. GL-monoidi M on täydellinen Boolen algebra jos ja vain jos M on sekä täydellinen Heyting algebra että täydellinen MV-algebra [5]. Integraalista, kommutatiivista, residuoitua, täydellistä Girard-monoidia kutsutaan myös *Girard quantaaliksi*.

Lattiisin $(L, \leq)$ sanotaan olevan on σ *-täydellinen*, mikäli kaikille lattiisin L numeroituville osajoukoille on olemassa supremum ja infimum [4].

2.3 M-arvoiset joukot ja monoidien kimput

Jokainen epäklassisen, formaalisen teorian realisaatio perustuu sopivaan lattiisiin $(L, \leq)$, johon liittyy tietyt loogiset aksioomat. Tällöin predikaattisymbolit voidaan tulkita L-arvoisina kuvauksina. Zadehin [12] tavoin Höhle tulkitsee yksikkövälin $[0, 1]$-arvoiset kuvaukset yleistettyinä, karakteristisina funktioina, jotka kuvaavat niin sanottuja *sumeita joukkoja*. Tarkasteltaessa integraalisia, kommutatiivisia cl-monoideja $(L, \leq, *)$ myös L-arvoiset kuvaukset voidaan tulkita yleistettyinä karakteristisina funktioina ns. L-sumeina joukoina.

2.3.1 M-arvoiset joukot

Määritelmä 2.25 *Olkoon $M = (L, \leq, *)$ integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi ja X ei-tyhjä joukko. Pari (X, E) on niin sanottu* M-arvoinen joukko, *missä kuvaus $E : X \times X \mapsto L$ on niin sanottu* M-arvoinen yhtäsuuruus joukossa X, *jos E toteuttaa seuraavat ehdot:*

$$
\begin{array}{lll}
(41) & E(x,y) \leq E(x,x) \wedge E(y,y), & \text{(strictness)} \\
(42) & E(x,y) = E(y,x), & \text{(symmetrisyys)} \\
(43) & E(x,y) * (E(y,y) \rightarrow E(y,z)) \leq E(x,z). & \text{(transitiivisyys)}
\end{array}
$$

Arvo $E(x, y)$ tulkitaan x:n ja y:n *samaistumisen* (*overlap*) asteeksi ja $E(x, x)$ x:n *olemassaolon ulottuvuudeksi*.

Esimerkki 2.26 Olkoon $M = (L, \leq, *)$ GL-monoidi

(a) $(L, \wedge)$ on M-arvoinen joukko.

(b) Olkoon R_L kaikkien sellaisten parien $(\alpha, \lambda) \in L \times L$ joukko, että $\lambda \leq \alpha$. Nyt kuvaus $E_L : R_L \times R_L \mapsto L$, jonka määrittelee relaatio

$$E_L((\alpha_1, \lambda_1), (\alpha_2, \lambda_2)) = ((\alpha_1 * (\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) \wedge (\alpha_2 * (\lambda_2 \rightarrow \lambda_1)),$$

on M-arvoinen yhtäsuuruus joukossa R_L.

(c) Koska minkä tahansa GL-monoidin $M = (L, \leq, *)$ lattiisi $(L, \leq)$ on täydellinen Heyting algebra, voidaan määritellä myös niin sanotut *L-arvoiset joukot*. Pari (X, E) on L-arvoinen joukko jos ja vain jos X on joukko ja kuvaus $E : X \times X \mapsto L$ toteuttaa ehdot

$$
\begin{array}{ll}
(42) & E(x,y) = E(y,x), \\
(43^*) & E(x,y) \wedge E(y,z) \leq E(x,z).
\end{array}
$$

Ehdot (42) ja (43*) implikoivat välittömästi ehdon (41). Lisäksi

$$\begin{aligned} E(x,y) * (E(y,y) \to E(y,z)) &\leq E(x,y) * (E(x,y) \to E(y,z)) \\ &\leq E(x,y) \wedge E(y,z) \end{aligned} \quad (23)$$

pätee. Niinpä jokainen L-arvoinen yhtäsuuruus on myös M-arvoinen yhtäsuuruus.

M-arvoisten joukkojen kategoria M^*-**SET** koostuu

- *objekteista*, jotka ovat M-arvoisia joukkoja,
- *morfismeista*, jotka ovat rakenteensa säilyttäviä kuvauksia, toisin sanoen $\phi : (X,E) \mapsto (Y,F)$ on morfismi jos ja vain jos $\phi : X \mapsto Y$ on kuvaus, joka toteuttaa aksioomat

  (44) $F(\phi(x), \phi(x)) \leq E(x,x)$ (strictness)

  (45) $E(x_1, x_2) \leq F(\phi(x_1), \phi(x_2))$ (yhtäsuuruuden säilyminen)

- kuvausten *kompositiosta*,
- parin (X,E) *identiteetistä*, joka on joukon X identiteettifunktio 1_X.

M^*-**SET** on täydellinen ja on rakenteeltaan monoidi.

Määritelmä 2.27 *M-arvoinen joukko (X,E) on* erillinen, *jos E täyttää ehdon*

(46) $E(x,x) \vee E(y,y) \leq E(x,y) \;\Rightarrow\; x = y.$ (erillisyys)

Kategorian M^*-**SET** täyttä alikategoriaa, joka koostuu kaikista erillisistä M-arvoisista joukoista merkitään M-**SET**. M-**SET** on täydellinen.

2.3.2 GL-monoidien kimput

Tarkastellaan aluksi tavallista, täydellisen Heytin algebran L kimppua (*presheaf over L*) .

Määritelmä 2.28 *Olkoon $M = (L, \leq)$ GL-monoidi, missä lattiisi $(L, \leq)$ on täydellinen Heyting algebra. $(X, \mathbb{E}, \rho)$ on niin sanottu* lattiisin L kimppu *jos X on joukko sekä $\mathbb{E} : X \mapsto L$ ja $\rho : X \times L \mapsto X$ ovat kuvauksia, jotka toteuttavat seuraavat aksioomat:*

$$
\begin{aligned}
&(47) \qquad \rho(x, \mathbb{E}(x)) = x \qquad \textit{kaikille} \qquad x \in X,\\
&(48) \qquad \rho(\rho(x, \alpha), \beta) = \rho(x, (\alpha \wedge \beta)),\\
&(49) \qquad \mathbb{E}(\rho(x, \alpha)) = \mathbb{E}(x) \wedge \alpha.
\end{aligned}
$$

Monoidin kimppumorfismi $\phi : (X, \mathbb{E}, \rho) \mapsto (Y, \mathbb{F}, \sigma)$ on kuvaus $\phi : X \mapsto Y$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

$$
\begin{aligned}
&(50) \qquad \mathbb{E} = \mathbb{F} \circ \phi,\\
&(51) \qquad \phi(\rho(x, \alpha)) = \sigma(\phi(x), \alpha).
\end{aligned}
$$

Lattiisin L kimppu sekä kimppumorfismit muodostavat kategorian $\mathbf{psh}(L)$.

Määritelmä 2.29 *Olkoon* $M = (L, \leq, *)$ *mielivaltainen GL-monoidi.* $(X, E, \mathbb{E}, \rho)$ *on* GL-monoidin M kimppu*, jos* (X, E) *on* M*-arvoinen joukko ja* $(X, \mathbb{E}, \rho)$ *on lattiisin* L *kimppu siten, että*

$$
\begin{aligned}
&(52) \qquad \mathbb{E}(x) = E(x, x),\\
&(53) \qquad E(x, y) * ((E(x, x) \to \alpha) \wedge (E(y, y) \to \beta)) \leq E(\rho(x, \alpha), \rho(y, \beta)).
\end{aligned}
$$

Määritelmä 2.30 *GL-monoidin* M *kimppu* $(X, E, \mathbb{E}, \rho)$ *on erillinen, jos* M*-arvoinen joukko (X, E) on erillinen.*

GL-monoidien M kimppujen kategoria $\mathbf{PSH}(M)$ koostuu

- *objekteista*, jotka ovat GL-monoidin M kimppuja,
- *morfismeista*, jotka ovat rakenteen säilyttäviä kuvauksia, toisin sanoen $\phi : (X, E, \mathbb{E}, \rho) \mapsto (Y, F, \mathbb{F}, \sigma)$ on kimppumorfismi jos ja vain jos kuvaus $\phi : (X, E) \mapsto (Y, F)$ on M^*-**SET** morfismi ja

$$\phi(\rho(x, \lambda)) = \sigma(\phi(x), \lambda) \qquad \text{kaikilla} \qquad x \in X, \lambda \in L.$$

Kategorian $\mathbf{PSH}(M)$ täyttä alikategoriaa, joka koostuu kaikista erillisistä monoidien M kimpuista merkitään $\mathbf{SPSH}(M)$. Kategoria $\mathbf{SPSH}(M)$ on täydellinen.

Olkoon (X, E) M-arvoinen joukko, $x \in X$ ja $\alpha, \lambda \in L$. Olkoon lisäksi $\tilde{X}$ kaikkien sellaisten parien (x, α) joukko, että $\alpha \leq E(x, x)$. Määritellään joukossa $\tilde{X}$ kuvaukset $\tilde{\mathbb{E}} : \tilde{X} \mapsto L$ ja $\rho : \tilde{X} \times L \mapsto \tilde{X}$ joille pätee

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}((x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2)) &= E(x_1, x_2) * ((E(x_1, x_1) \to \alpha_1) \wedge (E(x_2, x_2) \to \alpha_2)),\\
\tilde{\mathbb{E}}(x, \alpha) &= E(x, x) \wedge \alpha,\\
\rho((x, \alpha), \lambda) &= (x, (\lambda \wedge \alpha)).
\end{aligned}
$$

Lemma 2.31 *$(\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\mathbb{E}}, \rho)$ on GL-monoidin M kimppu.*

Todistus. Osoitetaan, että $(\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\mathbb{E}}, \rho)$ toteuttaa aksioomat (41), (42), (43) sekä ehdot (52), (53).

Näytetään ensin, että $(\tilde{X}, \tilde{E})$ on M-arvoinen joukko. Kuvauksen $\tilde{E}$ symmetrisyys on selvä ja strictness on seuraus ehdosta (23). Kuvauksen $\tilde{E}$ transitiivisyys saadaan ehtojen (23) ja (24) sekä ominaisuuden (27) perusteella:

$$\begin{aligned}
& \tilde{E}((x_2, \alpha_2), (x_3, \alpha_3)) \\
= \; & (E(x_2, x_2) \to E(x_2, x_3)) * \\
& ((E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) \wedge (E(x_2, x_2) * (E(x_3, x_3) \to \alpha_3))) \\
= \; & (E(x_2, x_2) \to E(x_2, x_3)) * (E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) * \\
& [(E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) \to (E(x_2, x_2) * (E(x_3, x_3) \to \alpha_3))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) \to (E(x_2, x_2) * (E(x_3, x_3) \to \alpha_3))] * \\
& [E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2 \wedge (E(x_2, x_2) * (E(x_1, x_1) \to \alpha_1))] \\
\leq \; & (E(x_2, x_2) * (E(x_3, x_3) \to \alpha_3)) \wedge (E(x_2, x_2) * (E(x_1, x_1) \to \alpha_1)) \\
= \; & E(x_2, x_2) * ((E(x_1, x_1) \to \alpha_1) \wedge (E(x_3, x) \to \alpha_3)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{E}((x_1, \alpha 1), (x_2, \alpha_2)) * ((E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) \to \tilde{E}((x_2, \alpha_2), (x_3, \alpha_3))) \\
= \; & (E(x_2, x_2) \to E(x_1, x_2)) * \\
& ((E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) \wedge (E(x_2, x_2) * (E(x_1, x_1) \to \alpha_1))) * \\
& (E(x_2, x_2) \to E(x_2, x_3)) * \\
& ((E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) \to (E(x_2, x_2) * (E(x_3, x_3) \to \alpha_3))) \\
\leq \; & (E(x_2, x_2) \to E(x_1, x_2)) * (E(x_2, x_2) \to E(x_2, x_3)) * \\
& (E(x_2, x_2) * ((E(x_1, x_1) \to \alpha_1) \wedge (E(x_3, x_3) \to \alpha_3))) \\
\leq \; & \tilde{E}((x_1, \alpha_1), (x_3, \alpha 3)).
\end{aligned}$$

$(\tilde{X}, \tilde{E})$ on siis M-arvoinen joukko. Selvästi $(\tilde{X}, \tilde{\mathbb{E}}, \rho)$ on lattiisin L kimppu, joka toteuttaa ominaisuuden (52). Lisäksi

$$\begin{aligned}
& \tilde{E}((x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2)) * \\
& ((E(x_1, x_1) \wedge \alpha_1) \to \lambda_1) \wedge ((E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) \to \lambda_2) \\
= \; & E(x_1, x_2) * ((E(x_1, x_1) \to \alpha_1) \wedge (E(x_2, x_2) \to \alpha_2)) * \\
& (((E(x_1, x_1) \wedge \alpha_1) \to \lambda_1) \wedge ((E(x_2, x_2) \wedge \alpha_2) \to \lambda_2)) \\
\leq \; & E(x_1, x_2) * ((E(x_1, x_1) \to (\alpha_1 \wedge \lambda_1)) \wedge (E(x_2, x_2) \to (\alpha_2 \wedge \lambda_2))) \\
= \; & \tilde{E}((x_1, (\alpha_1 \wedge \lambda_1)), (x_2, (\alpha_2 \wedge \lambda_2))),
\end{aligned}$$

joten (53) on voimassa ja $(\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\mathbb{E}}, \rho)$ on GL-monoidin M kimppu. $\Box$

On olemassa luonteva M^*-**SET**-morfismi $\eta_{(\hat{X,E})} : (X, E) \mapsto (\tilde{X}, \tilde{E})$, joka määritellään $\eta_{(\hat{X,E})}(x) = (x, E(x, x))$ kaikille $x \in X$. Alla on esitetty oleellinen tulos monoidien kimpuille $(\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\mathbb{E}}, \rho)$.

Teoreema 2.32 *Olkoon (X, E) M-arvoinen joukko ja $(\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\mathbb{E}}, \rho)$ GL-monoidin M kimppu. Nyt kaikille M^*-**SET**-morfismeille $\phi : (X, E) \mapsto (Y, F)$ on olemassa sellainen yksikäsitteinen **PSH**(M)-morfismi $\tilde{\phi} : (\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\mathbb{E}}, \rho) \mapsto (Y, F, \mathbb{F}, \sigma)$, että diagrammi*

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{E}) \arrow[r, "\tilde{\phi}"] & (Y, F) \\
(X, E) \arrow[u, "\hat{\eta}_{(X,E)}"] \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutoi. Erikoisesti, $\tilde{\phi}$ määritellään siten, että $\tilde{\phi}(x, \alpha) = \sigma(\phi(x), \alpha)$ kaikilla $(x, \alpha) \in X$.

M-arvoisen joukon (X, E) sanotaan *generoivan vapaasti* GL-monoidin M kimpun $(\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\mathbb{E}}, \rho)$.

2.4 MacNeillen täydennys

Ei-täydellisestä lattiisista voidaan tehdä täydellinen *MacNeillen täydennyksen* avulla. Seuraavassa on esitetty kommutatiivisten, residuoitujen l-monoidien MacNeillen täydennyksen perusperiaate sekä tärkeimpiä ominaisuuksia. Tulokset ovat Höhlen [4] esityksen mukaisia.

Tarkastellaan aluksi osittain järjestetyn joukon $(P, \leq)$ MacNeillen täydennystä.

Kaikille osajoukoille $A \subseteq P$ käytetään merkintää $\mathcal{U}(A)$ kaikkien joukon A ylärajojen joukosta ja merkintää $\mathcal{L}(A)$ kaikkien alarajojen joukosta. Tässä ylä- ja alarajat on määritelty operaation $\leq$ avulla. Lisäksi määritellään joukko $A^{\#} = \mathcal{L}(\mathcal{U}(A))$.

Nyt seuraavat relaatiot ovat voimassa:

$$\begin{aligned} A &\subseteq A^{\#}, \\ \mathcal{U}(A^{\#}) &= \mathcal{U}(A), \\ (A^{\#})^{\#} &= A^{\#}, \\ A \subseteq B &\Rightarrow A^{\#} \subseteq B^{\#}, \\ \left(\bigcap_{i\in I} A_i^{\#}\right)^{\#} &= \bigcap_{i\in I} A_i^{\#}. \end{aligned}$$

Olkoon lisäksi $\mathcal{P}^{\#} = \{A^{\#} | A \subseteq P\}$ (ts. $\mathcal{P}^{\#}$ on kaikkien P:n $\#$-suljettujen osajoukkojen joukko) ja olkoon $\preceq^{\#}$ osittainen järjestys joukossa $\mathcal{P}^{\#}$ (siis $\preceq = \subseteq$). Lattiisiarvoinen kuvaus $j^{\#} : (P, \leq) \to (\mathcal{P}^{\#}, \preceq^{\#})$ määritellään siten, että

$$j^{\#}(\alpha) = \{\alpha\}^{\#} = \{\lambda \in P | \lambda \leq \alpha\}.$$

Lemma 2.33 *Olkoon $(P, \leq)$ osittain järjestetty joukko. $(\mathcal{P}^{\#}, \preceq^{\#})$ on täydellinen lattiisi ja kuvauksella $j^{\#} : (P, \leq) \to (\mathcal{P}^{\#}, \preceq^{\#})$ on seuraavat ominaisuudet:*

(54) $A^{\#} = \vee\{j^{\#}(\alpha) | \alpha \in A\}$ *kaikilla* $A \subseteq P$.

(55) $\{\alpha \in P | j^{\#}(\alpha) \preceq^{\#} A^{\#}\} = A^{\#}$.

Todistus. Lattiisissa $(\mathcal{P}^{\#}, \preceq^{\#})$ määritellään

$$\bigvee_{i\in I} A_i^{\#} = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\#}\right)^{\#},$$

$$\bigwedge_{i\in I} A_i^{\#} = \left(\bigcap_{i\in I} A_i^{\#}\right)^{\#},$$

joten $(\mathcal{P}^{\#}, \preceq^{\#})$ on täydellinen lattiisi. (55) on ilmeinen ja koska

$$\mathcal{U}\left(\bigcup_{\alpha\in A} j^{\#}(\alpha)\right) = \mathcal{U}(A),$$

niin (54) seuraa. □

Teoreema 2.34 (MacNeillen täydennys) *Olkoon $(P, \leq)$ osittain järjestetty joukko. Nyt on olemassa sellainen osittain järjestetty joukko $(L, \leq)$ ja sellainen kuvaus j_L, että*

(56) $j_L(\alpha) \leq j_L(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$.

(57) *$(L, \leq)$ on täydellinen lattiisi.*

(58) *Kaikille alkioille $\lambda \in L$ pätee*

(a) $\{\alpha \in P \mid j_L(\alpha) \leq \lambda\}^{\#} = \{\alpha \in P \mid j_L(\alpha) \leq \lambda\}$.

(a) $\lambda = \vee \{j_L(\alpha) \mid \alpha \in P, \;\; j_L(\alpha) \leq \lambda\}$.

Lisäksi, 1. -3. asteen isomorfismi määrittelee yksikäsitteisesti systeemin $(j_L, (L, \leq))$.

Todistus. Edellisen lemman perusteella systeemi $(j_L, (L, \leq))$ on olemassa.

Jos $(j_{L_1}, (L_1, \leq))$ ja $(j_{L_2}, (L_2, \leq))$ ovat systeemejä, jotka teteuttavat ominaisuudet 1-3, niin lattiisin $(L_2, \leq)$ täydellisyyden perusteella voidaan määritellä kuvaus $\phi : L_1 \to L_2$ siten, että

$$\phi(\lambda_1) = \vee \{j_{L_2}(\alpha) \mid \alpha \in P, \;\; j_{L_1}(\alpha) \leq \lambda_1\}.$$

Selvästi ϕ on isotoninen ja diagrammi

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "j_{L_1}"'] \arrow[dr, "j_{L_2}"] & \\ L_1 \arrow[rr, "\phi"] & & L_2 \end{tikzcd}$$

kommutoi. Kun vaihdetaan joukkojen L_1 ja L_2 rooleja, voidaan määritellä isotoninen kuvaus $\psi : L_2 \to L_1$, jolle

$$\psi(\lambda_2) = \vee \{j_{L_2}(\alpha) \mid \alpha \in P, \;\; j_{L_2}(\alpha) \leq \lambda_2\}.$$

Olkoon

$$\begin{aligned} A_{\lambda_1} &= \{\alpha \in P \mid j_{L_1}(\alpha) \leq \lambda_1\} \qquad \text{kaikille } \lambda_1 \in L_1 \\ A_{\lambda_2} &= \{\alpha \in P \mid j_{L_2}(\alpha) \leq \lambda_2\} \qquad \text{kaikille } \lambda_2 \in L_2. \end{aligned}$$

Kuvaksen ϕ määritelmästä seuraa suoraan, että $A_{\lambda_1} \subseteq A_{\phi(\lambda_1)}$. Olkoon nyt $\bar{\alpha} \in A_{\phi(\lambda_1)}$, jolloin jokaiselle joukon A_{λ_1} ylärajalle β pätee

$$j_{L_2}(\alpha) \;\leq\; \bigvee_{\alpha \in A_{\lambda_1}} j_{L_2}(\alpha) \;\leq\; j_{L_2}(\beta).$$

Ominaisuuden (56) perusteella $\bar{\alpha}$ on joukon $\mathcal{U}(A_{\lambda_1})$ alaraja, eli $\bar{\alpha} \in A^{\#}_{\lambda_1}$. Koska A_{λ_1} on #-suljettu, niin $A_{\phi(\lambda_1)} \subseteq A_{\lambda_1}$. Toisin sanoen,

$$A_{\phi(\lambda_1)} = A_{\lambda_1}$$

ja vastaavasti

$$A_{\phi(\lambda_2)} = A_{\lambda_2},$$

Sovelletaan yllä saatua tulosta, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} A_{\lambda_1} &= A_{\psi(\phi(\lambda_1))}, \\ A_{\lambda_2} &= A_{\psi(\phi(\lambda_2))}. \end{aligned}$$

Nyt ominaisuuden (58) perusteella nähdään, että $\psi \circ \phi = 1_{L_1}$ ja $\phi \circ \psi = 1_{L_2}$, jotan kuvaus ϕ on bijektiivinen. □

Seuraavassa annetaan joitakin MacNeillen täydennykseen liittyviä tuloksia jatkoa varten. Todistukset ovat varsin työläitä ja ne sivuutetaan tämän työn puitteissa. Tarvittaessa todistukset löytyvät lähteestä [4].

Teoreema 2.35 *Olkoon $(P, \leq, *)$ residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Sen MacNeillen täydennys on kommutatiivinen cl-monoidi ja kuvaus l-monoidista $(P, \leq, *)$ sen MacNeillin täydennykseen säilyttää algebraalisen rakenteensa, eli on homomorfismi.*

Helposti nähdään, että MacNeillen täydennys säilyttää residuoidun, kommutatiivisen l-monoidin integraalisuuden.

Korollaari 2.36 *Olkoon $(P, \leq, *)$ integraalinen, kommutatiivinen Girard-monoidi. Sen MacNeillen täydennys on integraalinen, kommutatiivinen Girard quantaali.*

Lause 2.37 *Heyting algebran MacNeillen täydennys on Heyting algebra.*

Teoreema 2.38 *Olkoon $(P, \leq,)$ integraalinen, osittuva, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Jos $(P, \leq,)$ toteuttaa ehdon*

$$\alpha \leq \beta^n \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha * \beta,$$

niin sen MacNeillen täydennys on GL-monoidi.

Edellisen teoreeman ehdon täyttävän integraalisen, residuoidun, kommutatiivisen l-monoidin MacNeillen täydennys säilyttää osittuvuutensa.

Korollaari 2.39 *Lokaalisti äärellisen MV-algebran MacNeillen täydennys on lokaalisti äärellinen MV-algebra.*

2.5 Filtteriteoriaa

Filtteriteoria tarjoaa työkalun algebrojen perusominaisuuksien tutkimiseen [9]. Seuraavassa määritellään lattiisifiltterit ja annetaan niihin liittyviä ominaisuuksia. Määritelmät ovat Höhlen [4] esityksen mukaiset. Jatkossa luvussa 3.2 filtterit määrittelevät tapahtumien realisaatiot, joihin tutustutaan uskottavuusteorian yhteydessä.

Määritelmä 2.40 *Olkoon* $(L, \leq, *)$ *integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Ei-tyhjä joukko* $F \subseteq L$ *on* filtteri *lattiisissa* L *jos* F *toteuttaa seuraavat ominaisuudet.*

$$\alpha \leq \beta,\ \alpha \in F \quad \Rightarrow \quad \beta \in F. \tag{59}$$

$$\alpha, \beta \in F \quad \Rightarrow \quad \alpha * \beta \in F. \tag{60}$$

$$\boldsymbol{0} \notin F. \tag{61}$$

Kaikkien filttereiden $F \in L$ joukossa $\mathcal{F}(L)$ käytetään inkluusion $\subseteq$ määrittelemää osittaista järjestystä.

Määritelmä 2.41 *Filtterin sanotaan olevan* maksimaalinen*, jos* F *on osittain järjestetyn joukon* $(\mathcal{F}(L), \subseteq)$ *maksimaalinen alkio. Maksimaalista filtteriä kutsutaan myös* ultrafiltteriksi.

Määritelmä 2.42 *Filtteri* $F \in L$ *on niin sanottu* prime *filtteri, jos seuraava ehto on voimassa:*

$$\alpha \vee \beta \in F \quad \Rightarrow \quad \alpha \in F \text{ tai } \beta \in F. \tag{62}$$

Jatkossa alkion α n. potenssi suhteessa operaatioon $*$ merkittään aina α^n, toisin sanoen $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^n = \alpha^{n-1} * \alpha$.

Lause 2.43

(a) *Jokainen filtteri sisältyy maksimaaliseen filtteriin.*

(b) *Maksimaalinen filtteri on prime filtteri.*

Todistus. (a) on suora seuraus Zornin Lemmasta. Olkoon nyt F maksimaalinen filtteri ja $\alpha \vee \beta$ sen alkio. Oletetaan, että kumpikaan alkioista α ja β eivät ole filtterin F alkioita. Nyt F:n maksimaalisuuden perusteella on olemassa sellaiset alkiot $\gamma_1, \gamma_2 \in F$ sekä luonnolliset luvut n_1, n_2 ,että

$$\alpha^{n_1} * \gamma_1 = \mathbf{0}, \qquad \beta^{n_2} * \gamma_2 = \mathbf{0}.$$

Koska

$$(\alpha \vee \beta)^{n_1+n_2} * \gamma_1 * \gamma_2 = \mathbf{0},$$

saadaan ehdon (61) perusteella, että $\alpha \vee \beta$ ei ole filtterin F alkio. Niinpä oletus on väärä ja ehto (62) on voimassa. F on siis prime filtteri. □

Määritelmä 2.44 *Integraalisen, residuoidun, kommutatiivisen l-monoidin sanotaan olevan* semi-simple*, jos kaikkien maksimaalisten filttereiden leikkaus vastaa triviaalia filtteriä. Toisin sanoen,*

$$\bigcap\{U \mid U \text{ on maksimaalinen filtteri}\} = \{1\}.$$

Selvästi Boolen algebra on semi-simple. Todistamatta todettakoon, että Heyting algebra on semi-simple jos ja vain jos se on myös Boolen algebra.

Luku 3

Uskottavuusteoria

Kuten alussa jo todettiin, reaalimaailma sisältää useita epämääräisiä ympäristöjä. Uskottavuusteoriassa olemme kiinnostuneita ympäristöistä, joissa tapahtumia kuvaa epävarmuus. Tällaisissa ilmiöissä pieni muutos alkutilanteeseen voi aiheuttaa valtavan muutoksen tulokseen. Tällaisten ympäristöjen kuvaus perustuu kolmeen perushavaintoon: *tapahtumiin*, *tapahtumien realisaatioon* sekä *tapahtumien todennäköisyyteen*. Lattiisi L sekä lattiisin alkiot eli tapahtumat muodostavat sruktuurin, jolla pyritään määrittämään tämän epävarmuuden suuruutta. Tapahtumien epävarmuus liittää jokaisen tapahtuman reaalilukuun yksikkövälillä. Tämä jäsenyysaste kertoo siis epävarmuuden suuruudesta ja tiettyyn joukkoon kuulumisen asteesta.

Tässä luvussa tutustutaan lattiisiarvoisiin kuvauksiin, realisaatioihin ja niihin liittyviin uskottavuus- sekä todennäköisyysmittoihin. Nämä kuvaukset karakterisoivat osaltaan sumeita ilmiöitä. Luvussa 2 esitetyt määritelmät otetaan nyt käyttöön.

3.1 Perusaksioomat

Uskottavuusteoriaan liittyvää ympäristöä kuvataan σ -täydellisellä, tapahtumien l lattiisilla L. Ympäristössä määritellään järjestyksenvaihtaja $' : L \mapsto L$ siten, että $(l')' = l, l_1 \leq l_2 \Leftrightarrow l_2' \leq l_1'$.

De Morganin lait ovat voimassa:

$$\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} l_n\right)' = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} l_n', \qquad \left(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} l_n\right) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} l_n'.$$

Erikoisesti, $\bigvee \emptyset = \mathbf{1}$ on L:n suurin alkio ja $\bigwedge \emptyset = \mathbf{0}$ on L:n pienin alkio.

Tyypillisenä esimerkkinä mainittakoon reaaliselle yksikkövälille $[0,1]$ määritelty järjestyksenvaihtaja $' : L \mapsto L$, joka määritellään siten, että

$$l' = 1 - l, \qquad l \in [0,1].$$

Huomautus 3.1 Olkoon L lattiisi ja $'$ siinä määritelty komplementtioperaatio. Tällöin $'$ on myös järjestyksenvaihtaja.

Tapahtumien *realisaatio* on kuvaus $\omega : L \mapsto \{0,1\}$, joka toteuttaa seuraavat aksioomat:

$$\begin{aligned}
&(63) \qquad && \omega(\mathbf{0}) = 0, \\
&(64) \qquad && \omega(\mathbf{1}) = 1, \\
&(65) \qquad && \omega(l_1 \vee l_2) = \max\ (\omega(l_1), \omega(l_2)).
\end{aligned}$$

Realisaatiot tulkitaan uskottavuuskokeiden tuloksina. Edellä esitetyt ominaisuudet ovat uskottavuusteorian teoreettisen päättelyn aksioomat. Erikoisesti tapahtuma l tapahtuu suhteessa annettuun realisaatioon ω jos ja vain jos $\omega(l) = 1$.

Kuvaus $\mu : \mapsto [0,1]$ on *uskottavuusmitta* (*plausibility measure*) L:ssä jos ja vain jos μ toteuttaa seuraavat aksioomat:

$$\begin{aligned}
&(66) \qquad && \mu(\mathbf{0}) = 0, \qquad \mu(\mathbf{1}) = 1 \\
&(67) \qquad && l_1 \leq l_2 \Rightarrow \mu(l_1) \leq \mu(l_2) \\
&(68) \qquad && \mu\left(\bigwedge_{i=1}^{n} l_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots \leq j_i < n} \mu\left(\bigvee_{k=1}^{i} l_{j_k}\right) \\
&(69) \qquad && l_n \leq l_{n+1},\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(l_n) = \mu\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} l_n\right).
\end{aligned}$$

Huomautus 3.2 Olkoon $L = \mathbb{B}$ σ-täydellinen Boolen algebra. Nyt jokaisella todennäköisyysmitalla μ on seuraava ominaisuus:

$$\mu\left(\bigwedge_{i=1}^{n} l_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots \leq j_i < n} \mu\left(\bigvee_{k=1}^{i} l_{j_k}\right).$$

Niinpä jokainen todennäköisyysmitta on myös uskottavuusmitta.

Esimerkki 3.3 Olkoon X ei-tyhjä joukko. Lattiisioperaatiot yksikkövälille $[0,1]$ voidaan laajentaa pisteittäin joukkoon $[0,1]^X$:

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(x) &= \min\,(f(x),\, g(x)),\\ (f \vee g)(x) &= \max\,(f(x),\, g(x)),\\ f'(x) &= 1 - f(x).\end{aligned}$$

Nyt $[0,1]^X$ on σ-täydellinen lattiisi, jossa on määritelty järjestyksenvaihtaja. Lisäksi jokainen kuvaus $h : x \mapsto [0,1]$, jolla $\sup_{x \in X} h(x) = 1$, indusoi uskottavuusmitan μ_h joukkoon $[0,1]^X$ siten, että

$$\mu_h(f) = \sup_{x \in X}(f \wedge h)(x), \qquad f \in [0,1]^X.$$

Zadehin esittämän terminologian mukaan kuvaus μ_h on *mahdollisuusmitta* (*possibility measure*) ja h on sen *mahdollisuusjakauma* (*possibility distribution*)

Uskottavuusmitan ja realisaatioiden välinen yhteys on luonteeltaan teoreettinen. Tarkastellaan seuraavanlaista tilannetta:

Olkoon L lattiisi. Tarkastellaan tulotopologiaa τ_p joukossa $\{0,1\}^L$ (vert. diskreetti topologia joukossa $\{0,1\}$). Lattiisin L kaikkien realisaatioiden joukko $\mathfrak{R}(L)$ on τ_p-suljettu joukon $\{0,1\}^L$ suljettu osajoukko. Tychonoffin teoreeman[1] perusteella $\mathfrak{R}(L)$, jossa on määritelty τ_p:n indusoima topologia τ_r, on täysin eristetty, kompakti, topologinen avaruus.

Teoreema 3.4 *Kaikille uskottavuusmitoille μ lattiisissa L on olemassa yksikäsitteinen, τ_r- säännöllinen, Borelin todennäköisyysmitta ν_μ kompaktissa, kaikkien realisaatioiden joukossa $\mathfrak{R}(L)$ siten, että ν_μ:lle on voimassa*

$$(70)\quad \nu_\mu(\{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega(l) = 1\}) = \mu(l) \qquad \forall l \in L$$

$$(71)\quad \nu_\mu(\{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} l_n\right) = 1,\, \omega(l_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}) = 0,$$

missä $l_n \leq l_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Realisaation aksioomat (63)-(65) implikoivat, että kaikille äärellisille lattiisin L osajoukoille K pätee

[1]Tuloavaruus $\prod_{i \in I} X_i$ on kompakti jos ja vain jos X_i on kompakti $\forall i \in I$ [13]

$$\bigcap_{l \in K} \{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega(l) = 0\} = \{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega\left(\bigvee K\right) = 0\}.$$

Toisin sanoen, kaikkien joukon $\mathfrak{R}(L)$ sylinteristen osajoukkojen joukkoalgebralla $\mathfrak{U}$ on operaation $\bigcap$ suhteen stabiili generaattoreiden systeemi

$$\mathfrak{E} = \{\{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega(l) = 0\},\, l \in L\}.$$

Aksioomien (66)-(68) perusteella voidaan määritellä rajoitetusti additiivinen todennäköisyysmitta η_μ ($n \in \mathbb{N}$) joukossa $\mathfrak{U}$ siten, että

$$\begin{aligned} &\eta_\mu(\{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega(l_0) = 0,\, \omega(l_i) = 1\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \le j < \ldots < j_i \le n} \mu\left(l_0 \vee \left(\bigvee_{k=1}^{i} l_{j_k}\right)\right)\right) - \mu(l_0). \end{aligned}$$

Koska jokainen sylinterinen joukko on kompakti, voidaan η_μ laajentaa σ-additiiviseksi, Bairen todennäköisyysmitaksi $\bar{\eta_\mu}$. Määritelmän mukaan $\bar{\eta_\mu}$ täyttää ominaisuuden (70) ja aksiooman (69) perusteella myös ominaisuuden (71). Niinpä $\bar{\eta_\mu}$ voidaan laajentaa Borelin todennäköisyysmitaksi ν_μ joukossa $\mathfrak{R}(L)$. □

Edellä nähtiin, että kuvaus ν_μ liittää realisaation ω uskottavuusmittaan μ. Uskottavuusmitan μ sanotaan olevan *atomiton*(*atomless*) jos kaikille alkiolle $l_1 \in L$, joille $l_1 \neq \mathbf{0}$, on olemassa sellainen alkio $l_2 \in L,\ l_2 \neq \mathbf{0}$ ja $l_1 \le l_2$, joka voidaan liittää realisaation $\omega \in \mathfrak{R}(L)$ kautta uskottavuusmittaan μ. Kaikkien realisaatioiden joukon $\mathfrak{R}(L)$ perheen $\mathfrak{U}$ alkiot ovat uskottavuusmitan μ atomeja. Jos uskottavuusmittaan μ ei ole liitettävissä realisaatiota, sen sanotaan olevan *atominen* (*atomic*).

Korollaari 3.5 *Uskottavuusmitta μ on valuaatio (ts. kuvaukselle μ pätee $\mu(l_1) + \mu(l_2) = \mu(l_1 \vee l_2) + \mu(l_1 \wedge l_2)$) jos ja vain jos Borelin todennäköisyysmitalle ν_μ pätee*

$$(72) \quad \nu_\mu(\{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega(l_1 \wedge l_2) = \min(\omega(l_1), \omega(l_2))\ \forall l_1, l_2 \in L\}) = 1,$$

toisin sanoen, kuvauksen ν_μ kantaja (=supp(ν_μ) $= \{\omega \in \mathfrak{R}(L) | nu_\mu(\omega) \neq 0\}$) sisältyy kaikkien lattiisi-homomorfismien $\omega : L \mapsto \{0, 1\}$ joukkoon.

Todistus. Kuvauksen ν_μ määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned} &\nu_\mu(\{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega(l_1) = 1, \omega(l_2) = 1, \omega(l_1 \wedge l_2) = 0\}) \\ &= \mu(l_1) + \mu(l_2) - \mu(l_1 \vee l_2) - \mu(l_1 \wedge l_2) \qquad \forall l \in L, \end{aligned}$$

josta tulos seuraa. □

Koska realisaatiot ovat pistevieraita (ts. $\forall (l_1, l_2) \in L \times L$, $l_1 \neq l_2$ $\exists \omega \in \mathfrak{R}(L) : \omega(l_1) \neq \omega(l_2)$), voidaan tietty tapahtuma l erottaa joukossa $\{\omega \in \mathfrak{R}(L) | \omega(l) = 1\}$. Niinpä teoreeman 3.4 perusteella jokainen uskottavuusmitta on jonkin Borelin todennäköisyysmitan rajoittuma. Analyyttisesti ajateltuna uskottavuusteoria ei siten ole todennäköisyysteorian kelvollinen laajennus. Toisaalta korollaari 3.5 osoittaa, että uskottavuuskokeiden realisaatiot ovat todennäköisyys- (satunnais-) kokeiden realisaatioita epämääräisempiä.

Huomautus 3.6

1. Uskottavuusmitan μ duaalinen käsite on funktio b, joka voidaan De Morganin lakien perusteella määritellä siten, että $b(l) = 1 - \mu(l') \, \forall l \in L$.

2. Olkoon $(X, \mathscr{M})$ mitallinen avaruus ja olkoon $\sigma(\mathscr{M})$ kaikkien $\mathscr{M}$-mitallisten kuvausten $f : X \mapsto [0, 1]$ joukko. Tällöin $\sigma(\mathscr{M})$ on σ-täydellinen lattiisi, jossa on määritelty ilmeinen järjestyksenvaihtaja. Jokainen uskottavuusmitta, joka on myös valuaatio joukossa $\sigma(\mathscr{M})$ on *sumea todennäköisyysmitta*.

3.2 Uskottavuusmittoihin liittyvät realisaatiot

3.2.1 Todennäköisyysteoriaan liittyvä tapaus

Olkoon $L = \mathbb{B}$ σ-täydellinen Boolen algebra ja olkoon μ todennäköisyysmitta $\mathbb{B}$:ssä. Tällöin kaikki realisaatiot μ vastaavat Borelin todennäköisyysmittaa ν_μ m.k. (melkein kaikkialla). Todennäköisyysmitalle ν_μ on määritelty ultrafiltterien tavanomaiset karakteristiset funktiot $\mathbb{B}$:ssä. Erikoisesti Kolmogoroffin aksiooma pätee: $l \in \mathbb{B}$ tapahtuu jos ja vain jos sen komplementti l' ei tapahdu. Lisäksi, jos μ on atomiton, niin realisaatiot ovat ν_μ m.k. ja määräytyvät vapaista ultrafilttereistä.

3.2.2 Mahdollisuusteoriaan liittyvä tapaus

Olkoon X kiinnitetty, ei-tyhjä joukko ja $\mathfrak{P}(X)$ joukon X osajoukkojen joukko (eli potenssijoukko). Olkoon μ_h todennäköisyysmitta joukossa $\mathfrak{P}(X)$, toisin sanoen, on olemassa kuvaus $h : X \mapsto [0, 1]$ siten, että $\sup_{x \in X} h(x) = 1$ ja $\mu_h(A) = \sup_{x \in X} h(x)$. Erikoisesti, μ_h on joukossa $[0, 1]^X$ määritellyn mahdollisuusmitan (ks. esimerkki 3.1) rajoittuma. Lisäksi oletetaan, että kuvauksen h maalijoukko on numeroituva. Nyt on olemassa Borelmitallinen kuvaus $\Theta_h : [0, 1] \mapsto \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(X))$ siten, että

$$\Theta_h(\alpha) = \omega_\alpha,$$

missä

$$\omega_\alpha(A) = \begin{cases} 1, & A \cap \{x \in X | h(x) > \alpha\} \neq \emptyset \\ 0, & A \cap \{x \in X | h(x) > \alpha\} = \emptyset. \end{cases}$$

Mittaa μ_h vastaava Borelin mahdollisuusmitta ν_{μ_h} on *Lebesguen mitan* kuva operaation Θ_h suhteen. Niinpä kaikkien kuvausten μ_h realisaatiot ν_{μ_h} m.k. ovat tyyppiä ω_α. Kolmogoroffin aksioomaan verrattuna, implikaatio pätee vain toiseen suuntaan: jos A' ei tapahdu, niin A tapahtuu. Toisaalta, jos A tapahtuu, niin yleiset mahdollisuusmitan realisaatiot eivät kerro komplementin A' tapahtumisen todennäköisyydestä. Tässä mielessä mahdollisuusmittojen realisaatiot ovat todennäköisyysmittojen realisaatioita epämääräisempiä.

3.3 Uskottavuusteoriaan perustuva informaatioteoria

Olkoon L σ-täydellinen lattiisi, jossa on määritelty järjestyksenvaihtaja $'$, ja olkoon $\omega : L \mapsto \{[0,1]\}$ realisaatio, kuten on määritelty luvussa 3.1. Tapahtuma $l \in L$ on *erottuva* (*discernible*) tapahtumasta l' realisaation ω suhteen ω jos ja vain jos $\omega(l) \neq \omega(l')$. Vastaavasti tapahtuma $l \in L$ on *erottumaton* (*indiscernible*) tapahtumasta l' jos ja vain jos $\omega(l) = \omega(l')$.

Huomautus 3.7 (Ortomodulaarinen tapaus) Olkoon L σ-täydellinen, ortomodulaarinen lattiisi. Lisäksi, olkoon $\omega : L \mapsto \{0,1\}$ realisaatio ja $l \in L$ tapahtuma. Jos l ei tapahdu suhteessa realisaatioon ω (ts, $\omega(l) = 0$), niin l ja l' ovat erottuvia (suhteessa realisaatioon ω). Lisäksi, jos $\omega : L \mapsto \{0,1\}$ on lattiisi-homomorfismi, niin kaikki alkiot $l \in L$ ovat erottuvia komplementeistaan l' (suhteessa realisaatioon ω).

Olkoon μ uskottavuusmitta lattiisissa L. Jokaista realisaatiota $\omega : L \mapsto \{0,1\}$ kohti voidaan määritellä *erottuvuuden maksimaalinen informaatio* $e_\mu^{(i)}(\omega)$ ja vastaavasti *erottumattomuuden maksimaalinen informaatio* $s_\mu^{(i)}(\omega)$ kahdella tavalla:

$$e_\mu^{(1)}(\omega) = \sup_{l \in L} \{-(\ln(\mu(l))) \cdot \omega(l) \cdot (1 - \omega(l'))\},$$

$$\begin{aligned}
e_\mu^{(2)}(\omega) &= \sup_{l\in L}\left\{-(\ln(\mu(l\vee l')-\mu(l)))\cdot(1-\omega(l))\cdot\omega(l')\right\},\\
s_\mu^{(1)}(\omega) &= \sup_{l\in L}\left\{-(\ln(\mu(l)+\mu(l')-\mu(l\vee l')))\cdot\omega(l)\cdot\omega(l')\right\},\\
s_\mu^{(2)}(\omega) &= \sup_{l\in L}\left\{-(\ln(1-\mu(l\vee l')))\cdot(1-\omega(l))\cdot(1-\omega(l'))\right\}.
\end{aligned}$$

Havaitaan, että kuvaukset $e_\mu^{(i)} : \mathfrak{R}(L) \mapsto [0,\infty]$ ja $s_\mu^{(i)} : \mathfrak{R}(L) \mapsto [0,\infty]$ $(i = 1,2)$ ovat puolijatkuvia suhteessa annettuun topologiaan τ_r joukossa $\mathfrak{R}(L)$. Niinpä $e_\mu^{(i)}$ ja $s_\mu^{(i)}$ ovat Borel-mitallisia $(i = 1,2)$. Koska *entropiat* ovat *informaatio funktioiden* saamia arvoja, erottuvuuden ja erottumattomuuden entropiat voidaan määritellä Borelin todennäköisyysmitan ν_μ avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
E_\mu^{(1)} &= \textstyle\int_{\mathfrak{R}(L)} e_\mu^{(1)} d\nu_\mu, & E_\mu^{(2)} &= \displaystyle\int_{\mathfrak{R}(L)} e_\mu^{(2)} d\nu_\mu,\\
S_\mu^{(1)} &= \textstyle\int_{\mathfrak{R}(L)} s_\mu^{(1)} d\nu_\mu, & S_\mu^{(2)} &= \displaystyle\int_{\mathfrak{R}(L)} s_\mu^{(2)} d\nu_\mu.
\end{aligned}$$

Entropioita $E_\mu^{(i)}$ kutsutaan tyyppiä 1 ja 2 olevan todennäköisyysmitan μ *erottuvuuden entropiaksi.* Vastaavasti entropioita $S_\mu^{(i)}$ kutsutaan tyyppiä 1 ja 2 olevan todennäköisyysmitan μ *erottumattomuuden entropiaksi.*

Lause 3.8 (Shannonin entropia) *Olkoon X ei-tyhjä joukko ja μ atominen todennäköisyysmitta X:n potenssijoukossa . Olkoon $\mathfrak{U}$ kaikkien μ:n atomien joukko. Nyt uskottavuusmitan μ erottuvuuden ja erottumattomuuden entropiat ovat*

$$\begin{aligned}
E_\mu^{(1)} &= E_\mu^{(2)} &&= \sum_{x_n\in\mathfrak{U}}(-\ln(\mu(\{x_n\}))\cdot\mu(\{x_n\})),\\
S_\mu^{(1)} &= S_\mu^{(2)} &&= 0.
\end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $\mathfrak{P}(X)$ joukon X potenssijoukko. Määritellään kuvaus $\Theta : X \mapsto \mathfrak{R}(\mathfrak{P}(X))$ siten, että

$$\begin{aligned}
\Theta(x) &= \omega_x,\\
\omega_x(A) &= \left\{\begin{array}{l} 1 : x\in A \\ 0 : x\notin A\end{array}\right\},\\
x &\in X.
\end{aligned}$$

Nyt Θ on triviaalisesti Borel-mitallinen ja μ:n kuva $\Theta(\mu)$ vastaa Borelin todennäköisyysmittaa μ. Nyt havaitaan, että

$$s_\mu^{(1)}(\Theta) = \sup_{l\in L}\left\{-(\ln(\mu(l)+\mu(l')-\mu(l\vee l'))\cdot 1\cdot 0\right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
s_\mu^{(2)}(\Theta) &= \sup_{l\in L}\{-(\ln(1-\mu(l\vee l')))\cdot(1-1)\cdot(1-0)\} = 0,\\
e_\mu^{(1)}(\Theta) &= \sup_{l\in L}\{-(\ln(\mu(l)))\cdot 1\cdot 1\} = -\ln(\mu(l)),\\
e_\mu^{(2)}(\Theta) &= \sup_{l\in L}\{-(\ln(\mu(l\vee l')-\mu(l)))\cdot(1-1\cdot 0)\} = -\ln(\mu(l\vee l')-\mu(l)).
\end{aligned}$$

Toisin sanoen

$$\begin{aligned}
&s_\mu^{(1)}\circ\Theta = s_\mu^{(2)}\circ\Theta = 0,\\
&e_\mu^{(1)}\circ\Theta(x) = e_\mu^{(2)}\circ\Theta(x) = -\ln(\{x\}),\\
&x\in X.
\end{aligned}$$

Sovelletaan entropian määritelmää diskreettiin tapaukseen, josta tulos seuraa. □

Lause 3.9 (Mahdollisuusmitat) *Olkoon X ei-tyhjä joukko ja $h: X\mapsto [0,1]$ kuvaus, jolla on numeroituva maalijoukko. Olkoon lisäksi μ_h kuvauksen h indusoima mahdollisuusmitta X:n potenssijoukossa $\mathfrak{P}(X)$. Tällöin erottuvuuden ja erottamattomuuden entropiat ovat*

$$\begin{aligned}
E_{\mu_h}^{(1)} &= 0, \qquad E_{\mu_h}^{(2)} = \int_0^1 -\ln\left(1-\sup\left\{h(h^{-1}([0,\alpha]))\right\}\right)d\alpha,\\
S_{\mu_h}^{(2)} &= 0, \qquad S_{\mu_h}^{(1)} = \int_0^1 -\ln\left(\inf\left\{h(h^{-1}(]0,\alpha[))\right\}\right)d\alpha.
\end{aligned}$$

Todistus. Tarkastellaan mitallista kuvausta $\Theta_h : [0,1[\mapsto \mathfrak{R}(\mathfrak{B}(X))$ (Θ_h on määritelty kappaleessa 3.2.2). Ekvivalenssin

$$\omega_\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow A\subset\{x\in X|h(x)\le\alpha\}\Leftrightarrow \mu_h(A)\le\alpha, \qquad (A\in\mathfrak{B}(X)),$$

perusteella

$$\begin{aligned}
&e_{\mu_h}^{(1)}\circ\Theta_h(\alpha) = 0 \qquad \forall\alpha\in[0,1[,\\
&e_{\mu_h}^{(2)}\circ\Theta_h(\alpha) = -\ln\left(1-\sup\left\{h(h^{-1}([0,\alpha]))\right\}\right),\\
&s_{\mu_h}^{(1)}\circ\Theta_h(\alpha) = -\ln\left(\inf\left\{h(h^{-1}(]0,\alpha[))\right\}\right).
\end{aligned}$$

Lisäksi määritelmän perusteella $s_{\mu_h}^{(2)} = 0$. Koska ν_{μ_h} on Lebesquen mitan mitallinen kuva, tulos seuraa. □

Huomautus 3.10 Todennäköisyysteoriaan liittyvissä ympäristöissä tyypin 1 ja 2 erottuvuuden entropiat ovat samat ja yhtyvät Shannonin entropiassa. Mahdollisuusteoreettisissa ympäristöissä kohdataan lisäksi erottamattomuuden entropiat, jotka todennäköisyysteoreettisessa ympäristössä häviävät. Niinpä informaatioteorian kannalta uskottavuusteoria ja todennäköisyysteoria eroavat merkittävästi.

Luku 4

Epäklassinen malliteoria

4.1 Monoidinen logiikka

Lattiisiarvoisia kuvauksia voidaan tulkita yksiargumenttisina (unary) predikaattisymboleina. Tarkastellaan tilannetta formuloimalla monoidinen lauselogiikka.

Olkoon $\mathscr{L}$ kertalukua nolla oleva formaalinen kieli. Toisin sanoen kielen $\mathscr{L}$ aakkoset $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C} \ldots$ koostuvat äärettömömästi numeroituvasta joukosta $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}$, äärellisestä, loogisten symbolien joukosta $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \otimes\}$ sekä erottimien joukosta $\{), (\}$. Hyvin määritelty formula α, määritellään rekursiivisesti:

- alkio $v \in \mathbb{V}$ on hyvin määritelty formula,
- jos α on hyvin määritelty formula, niin $\neg\alpha$ on hyvin määritelty formula,
- jos α ja β ovat hyvin määriteltyjä, niin $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ ja $(\alpha \otimes \beta)$ ovat hyvin määriteltyjä formuloita.

Formaalinen kieli $\mathscr{L}$ koostuu hyvin määritellyistä formuloista. *Monoidisessa lauselogiikassa* (*monoidal sentential calculus*) seuraavat logiikan aksioomaskeemat ovat oletuksena:

(73)	$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)))$	(syllogismi)
(74)	$(\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta))$	
(75)	$(\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta))$	
(76)	$((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)))$	
(77)	$((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha)$	

(78) $((\alpha \otimes \beta) \to \alpha)$

(79) $((\alpha \wedge \beta) \to \beta)$

(80) $((\alpha \otimes \beta) \to (\beta \otimes \alpha))$

(81) $(((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma) \to (\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)))$

(82) $((\gamma \to \alpha) \to ((\gamma \to \beta) \to (\gamma \to (\alpha \wedge \beta))))$

(83) $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \otimes \beta) \to \gamma))$

(84) $(((\alpha \otimes \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)))$

(85) $((\alpha \otimes \neg\alpha) \to \beta)$ (Duns Scotus)

(86) $((\alpha \to (\alpha \otimes \neg\alpha)) \to \neg\alpha)$.

Lisäksi erityisenä päättelysääntönä sovelletaan Modus Ponensia (MP)[1]. *Teoreema* määritellään aksioomista johdettavissa olevaksi propositioksi. *Todistus* on formuloiden jono, jossa jokainen formula on aksiooma. Formula on *todistuva* (*provable*), jos se on todistuksen viimeinen jäsen. Jos α on todistuva, niin sitä merkitään $\vdash \alpha$.

Lemma 4.1 *Olkoon SC (sentential calculus) monoidinen lauselogiikka. Kaikille $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{L}$ pätee*

(87) $\vdash (\alpha \to \alpha)$

(88) $\vdash ((\alpha \otimes (\alpha \to \beta)) \to \beta)$

(89) $\vdash (\alpha \to (\beta \to (\beta \otimes \alpha)))$

(90) *Jos* $\vdash \alpha$, *niin* $\vdash (\beta \to (\beta \otimes \alpha))$

(91) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \alpha))$

(92) $\vdash ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \otimes \beta) \to (\alpha \otimes \gamma)))$.

Todistus.

$$\vdash (((((\alpha \otimes \alpha) \to \alpha) \otimes \alpha) \to \alpha) \to (((\alpha \otimes \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))), \quad (84)$$
$$\vdash ((((\alpha \otimes \alpha) \to \alpha) \otimes \alpha) \to \alpha), \quad (68)$$
$$\vdash (((\alpha \otimes \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)), \quad (\mathrm{MP})$$
$$\vdash ((\alpha \otimes \alpha) \to \alpha), \quad (68)$$
$$\vdash (\alpha \to \alpha). \quad (\mathrm{MP})$$

Kaava (87) on siis voimassa.

[1] Jos α ja $\alpha \to \beta$ niin β

$$\begin{array}{lll}
 & \vdash (((\beta \otimes \alpha) \to (\alpha \otimes \beta)) \to (((\alpha \otimes \beta) \to \gamma) \to ((\beta \otimes \alpha) \to \gamma))), & (73) \\
 & \vdash ((\alpha \otimes \beta) \to \gamma) \to ((\beta \otimes \alpha) \to \gamma)), & (80), (MP) \\
(*) & \vdash ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma)), & (83), (84) \\
 & \vdash (((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))). & \\
 & \vdash ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)). & (87) \\
 & \vdash (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)), & (MP) \\
 & \vdash ((\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)) \to (\alpha \otimes (\alpha \to \beta)) \to \beta), & (83) \\
 & \vdash ((\alpha \otimes (\alpha \to \beta)) \to \beta). & (MP)
\end{array}$$

Kaava (88) on siis voimassa.

$$\begin{array}{ll}
\vdash ((\alpha \otimes \beta) \to (\beta \otimes \alpha)), & (80) \\
\vdash (((\alpha \otimes \beta) \to (\beta \otimes \alpha)) \to (\alpha \to (\beta \to (\beta \otimes \alpha)))), & (84) \\
\vdash (\alpha \to (\beta \to (\beta \otimes \alpha))). & (MP)
\end{array}$$

Kaava (89) pätee. Kaava (90) seuraa suoraan kaavasta (89) sekä päättelysäännöstä (MP). Kaavan (91) todistus etenee seuraavasti:

$$\begin{array}{ll}
\vdash ((\alpha \otimes \beta) \to \alpha)\ , & (78) \\
\vdash (((\alpha \otimes \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to (\beta \to \alpha))), & (84) \\
\vdash (\alpha \to (\beta \to \alpha)). & (MP)
\end{array}$$

Todistetaan vielä kaava (92):

$$\begin{array}{ll}
\vdash ((\beta \otimes (\beta \to \gamma)) \to \gamma), & (88) \\
\vdash (\gamma \to (\alpha \to (\alpha \otimes \gamma))), & (88) \\
\vdash ((\beta \otimes (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to (\alpha \otimes \gamma))), & (73), (MP) \\
\vdash (\beta \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\alpha \otimes \gamma)))), & (84), (MP) \\
\vdash (\beta \to (\alpha \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \otimes \gamma)))), & (73), (*), (MP) \\
\vdash ((\alpha \otimes \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \otimes \gamma))), & (83), (MP) \\
\vdash ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \otimes \beta) \to (\alpha \otimes \gamma))). & (*), (MP)
\end{array}$$

□

Syllogismin sekä relaation (87) seurauksena relaatio $\triangleright$ joka määritellään siten, että

$$\alpha \triangleright \beta \Leftrightarrow \vdash (\alpha \to \beta),$$

on esijärjestys kaikkien hyvin määriteltyjen formuloiden joukossa $\mathscr{L}$. Jos $\sim$ on relaatioon $\triangleright$ liittyvä ekvivalenssirelaatio (ts. $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \vdash (\alpha \to \beta)$ ja

$\vdash (\beta \to \alpha))$, niin voidaan tarkastella kaikkien loogisesti ekvivalenttisten formuloiden ekvivalenssiluokan tekijää $L = \mathscr{L}/\sim$. Erikoisesti, $\rhd$ indusoi osittaisen järjestyksen $\leq$ joukkoon L. Aksioomien (74)-(82) ja (85), sekä relaation (91) perusteella, on helppo nähdä, että $(L, \leq)$ on lattiisi, jossa on suurin alkio $\mathbf{1} = \{\alpha \in L | \vdash \alpha\}$. (73):n, (80):n sekä (92):n perusteella looginen symboli $\otimes$ määrittelee joukossa L binäärisen operaation $*$ siten, että

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha' \otimes \beta'], \qquad \text{missä } \alpha' \in [\alpha], \qquad \beta' \in [\beta].$$

Aksioomien (78), (80), (81), (83) ja (84) sekä ominaisuuden (90) perusteella $(L, \leq, *)$ on integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Erikoisesti, integraalista, residuoitua, kommutatiivista l-monoidia $(L, \leq, *)$ kutsutaan monoidisen lauselogiikan *Lindenbaum algebraksi.*

Jos monoidisen logiikan aksioomiin lisätään idempotenttisyys laki, toisin sanoen

$$(93) \qquad (\alpha \to (\alpha \otimes \alpha)),$$

niin loogiset symbolit $\otimes$ ja $\wedge$ ovat ekvivalenttisia. Tällöin Lindenbaum algebra on myös Heyting algebra. Laajennettu aksioomasysteemi pelkistyy nyt *intuitiivisen logiikan* aksioomiksi ja monoidinen lauselogiikka sekä intuitiivinen lauselogiikka vastaavat toisiaan.

Jos monoidisen logiikan aksioomiin lisätään kaksoisnegaation laki, toisin sanoen

$$(94) \qquad (\neg\neg\alpha \to \alpha),$$

niin Lindenbaum algebra on Girard-monoidi.

Jos monoidisen logiikan aksioomiin lisätään edellisen lisäksi osittuvuuslaki, toisin sanoen

$$(95) \qquad ((\alpha \wedge \beta) \to (\alpha \otimes (\alpha \to \beta))),$$

niin Lindenbaum algebra on osittuva Girard-monoidi ja siten MV-algebra. Tämä on todistettu Lemmassa 2.22. Näin laajennettu aksioomasysteemi pelkistyy niin sanotuiksi *Łukasiewiczin logiikan Wajsberg aksioomiksi*,

- $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$
- $((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))$ (syllogismi)

- $(((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha))$
- $((\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha))$ (kontrapositio)

jotka ovat Łukasiewicz lauselogiikan aksioomat.

Kun aksioomat (93), (94) sekä (95) yhdistetään monoidisen logiikan aksioomiin, saadaan klassinen lauselogiikka. Tällöin Lindenbaum algebra on MV-algebra sekä Heyting algebra ja siten Boolen algebra.

Huomautus 4.2 Olkoon $\mathscr{L}$ kertalukua nolla oleva formaalinen kieli ja olkoon $M = (L, \leq, *)$ mielivaltainen, integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. *M-arvon määräys* on kuvaus $l : \mathbb{V} \mapsto L$. M-valuaatio on kuvaus $\phi : \mathscr{L} \mapsto L$, joka toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned}
\phi(\neg\alpha) &= \phi(\alpha) \to 0, \\
\phi((\alpha \vee \beta)) &= \phi(\alpha) \vee \phi(\beta), \\
\phi((\alpha \wedge \beta)) &= \phi(\alpha) \wedge \phi(\beta), \\
\phi((\alpha \otimes \beta)) &= \phi(\alpha) * \phi(\beta), \\
\phi((\alpha \to \beta)) &= \phi(\alpha) \to \phi(\beta).
\end{aligned}$$

(a) Jokaisella M-arvon määräyksellä l on yksikäsitteinen laajennus M-valuaatioksi $\phi_l : \mathscr{L} \mapsto L$. Jokaisen M-arvon määräyksen voidaan siten ajatella määräävän hyvin määritellyn formulan α totuusarvo.

(b) Jos $M = (L, \leq, *)$ on Lindenbaum algebra, joka vastaa monoidista lauselogiikkaa SC, niin kuvaus $\phi_l : \mathscr{L} \mapsto L = \mathscr{L}/\sim$ on M-valuaatio.

Lause 4.3 (Monoidisen lauselogiikan SC soudness ja täydellisyys) *Olkoon α hyvin määritelty formula. Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalenttisia:*

(96) $\vdash \alpha$.

(97) *Kaikille integraalisille, residuoiduille, kommutatiivisille l-monoideille M sekä kaikille M-arvon määräyksille pätee $\phi_l = 1$.*

Todistus. Sivuutetaan.

Määritelmä 4.4 *Binäärinen operaatio T yksikkövälillä $[0, 1]$ on niin sanottu* t-normi, *jos se toteuttaa seuraavat ehdot:*

$$
\begin{array}{lll}
(98) & T(x,1) = x, \qquad T(x,0) = 0, & \\
(99) & T(x,y) = T(y,x), & \text{(symmetrisyys)} \\
(100) & T(x,y) \leq T(\bar{x},\bar{y}), \qquad \forall\, x \leq \bar{x},\, y \leq \bar{y}, & \text{(isotonisuus)} \\
(101) & T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z). & \text{(assosiatiivisyys)}
\end{array}
$$

Monissa ongelmissa yksikköväli $[0,1]$ tulkitaan totuusarvojen joukkona. Joukolle $[0,1]$ voidaan konstruoida useita puoliryhmärakenteita [2]. Puoliryhmissä määriteltyjä t-normeja ovat

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Min}(\alpha,\beta) &= \min(\alpha,\beta), \\
\mathrm{Prod}(\alpha,\beta) &= \alpha\cdot\beta, \\
T_m(\alpha,\beta) &= \max(\alpha+\beta-1,0), \\
T_0(x,y) &= \begin{cases} \min(x,y), & 1 < x+y \\ 0, & x+y \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Määritelmien perusteella voidaan tehdä seuraavat havainnot:

- Koska $\min(\alpha,\alpha) = \alpha$ on α idempotentti operaation min suhteen ja $([0,1],\leq,\mathrm{Min})$ on tällöin täydellinen Heyting algebra.
- $([0,1],\leq,T_m)$ toteuttaa määritelmän 2.21 ehdon, joten se on täydellinen MV-algebra.
- $([0,1],\leq,T_0)$ täyttää määritelmän 2.17 ehdon, joten se on integraalinen, kommutatiivinen, täydellinen Girard-monoidi.
- $([0,1],\leq,\mathrm{Prod})$ in integraalinen, osittuva, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Se ei kuitenkaan ole Heyting algebra eikä Girard-monoidi eikä siten myöskään MV-algebra.

Teoreema 4.5 (Tarskin Lemma) *Olkoon $M = (L,\leq,*)$ σ-täydellinen MV-algebra ja $1 \neq \alpha_0 \in L$. Olkoon lisäksi $\{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ numeroituva, L:n numeroituvien osajoukkojen A_n, perhe. Nyt on olemassa MV-algebramorfismi $h : M \mapsto ([0,1],\leq,T_m)$ jolle pätee*

$$
\begin{array}{ll}
(102) & h(\alpha_0) \neq 1, \\
(103) & \inf\limits_{\beta\in A_n} h(\beta) = h(\wedge A_n) \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.
\end{array}
$$

[2]Puoliryhmä $(A,\cdot)$ on sellainen joukko A, jossa on määritelty assosiatiivinen binäärioperaatio $\cdot$. Mikäli puoliryhmässä on identiteettialkio, se on monoidi.

Todistus. Todistus perustuu useaan lemmaan, joita tässä yhteydessä ei esitetä. Täydellinen todistus löytyy lähteestä [4].

Epäklassisen predikaattilogiikan soundness ja täydellisyys on Tarskin Lemman merkittävä seuraus. Toisin sanoen hyvin määritelty formula α on todistuva jos ja vain jos α saavuttaa arvon 1 kaikilla $[0,1]$-arvoisilla tulkinnoilla sekä kaikilla valuaatioilla.

Teoreema 4.6 (Łukasiewiczin logiikan soundness ja täydellisyys) *Olkoon SC Łukasiewiczin lauselogiikka ja olkoon α hyvin määritelty formula. Seuraavat ominaisuuden ovat ekvivalenttisia.*

(104) $\vdash \alpha$.

(105) *Kaikille MV-algebroille M ja kaikille M-arvojen määräyksille l yhtälö $\phi_l(\alpha) = 1$ pätee.*

(106) *Jos $M = ([0,1], \leq, T_m)$, niin kaikille $[0,1]$-arvojen määräyksille yhtälö $\phi_l(\alpha) = 1$ pätee.*

Todistus. Teoreeman todistus vaatii varsin laajan tarkastelun, joten tämän diplomityön puitteissa se sivuutetaan.

Monoidista predikaattilogiikkaa (*monoidial predicate calculus*) PC varten määritellään kertalukua 1 oleva formaalinen kieli $\mathscr{L}$.

Olkoon aakkoston kirjain $\mathscr{A}$ pistevieraiden, äärettömästi numeroituvien joukkojen $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, \ldots\}$ unioni, missä v_i on yksilöllinen muuttuja. Olkoon $\mathbb{F}$ n-argumenttisten funktionaalisten symbolien $\mathbf{f}^{(n)}$ joukko ja $\mathbb{P}$ äärellinen, n-argumenttisten predikaattisymbolien $\mathbf{p}^{(n)}$ joukko. Olkoon lisäksi $\mathbb{Q} = \{\forall, \exists\}$ kvanttorisymbolien joukko, $\mathbb{L} = \{\neg, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow\}$ loogisten symbolien joukko sekä $\{), , , (\}$ apusymbolien joukko.

Määritellään rekursiivisesti *termit* sekä hyvin määritellyt *formulat*:

- Yksilöllinen muuttaja v on termi.
- Jos $\mathbf{f}^{(n)}$ on n-argumenttinen funktionaalinen symboli ja $\tau_1, \ldots, \tau_n$ ovat termejä, niin $\mathbf{f}^{(n)}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ on termi.
- Jos $\mathbf{p}^{(n)}$ on n-argumenttinen predikaattisymboli ja $\tau_1, \ldots, \tau_n$ ovat termejä, niin $\mathbf{p}^{(n)}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ on hyvin määritelty formula.

- Jos α on hyvin määritelty formula, niin $\neg\alpha$ on myös hyvin määritelty formula.
- Jos α ja β ovat hyvin määriteltyjä formuloita, niin tällöin myös $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \otimes \beta), (\alpha \to \beta)$ ovat hyvin määriteltyjä formuloita.
- Jos α on hyvin määritelty formula ja v on yksilöllinen muuttuja, niin $(\forall v)\alpha, (\exists v)\alpha$ ovat hyvin määriteltyjä formuloita.

Ensimmäistä kertalukua oleva formaalinen kieli $\mathscr{L}$ koostuu hyvin määritellyistä formuloista. Lisäksi oletuksena ovat monoidisen lauselogiikan loogiset aksioomat sekä tavalliset kvanttoriaksioomat. Toisin sanoen, kaikille formuloille α sekä kaikille termeille τ, joille yksilöllinen muuttuja v on vapaa formulassa α, on oletuksena aksioomat

$$((\forall v)\,\alpha \to \alpha\,(v/\tau))\,,$$
$$(\alpha\,(v/\tau) \to (\exists v)\,\alpha)\,,$$

missä merkintä $\alpha\,(v/\tau)$ tarkoittaa tulosta, kun jokainen formulassa esiintyvä vapaa v korvataan termillä τ.

Päättelysääntönä sovelletaan Modus Ponensia sekä kahta kvanttorisääntöä:

($\forall$) Jos v ei ole vapaa formulassa α, niin formulasta $(\alpha \to \beta)$ seuraa $(\alpha \to (\forall v)\beta)$.

($\exists$) Jos v ei ole vapaa formulassa α, niin formulasta $(\alpha \to \beta)$ seuraa $((\exists v)\alpha \to \beta)$.

Monoidisen predikaattilogiikan Lindenbaum algebra on tässä siis kaikkien formuloitten α kanssa loogisesti ekvivalenttien formuloitten β muodostamien ekvivalenssiluokkinen $[\alpha]$ algebra. Se on lisäksi jälleen integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi, joka toteuttaa ominaisuudet

$$\begin{aligned} [(\forall v)\alpha] &= \bigwedge_{\tau\in\mathbb{T}} [\bar{\alpha}_\tau(v/\tau)]\,, \\ [(\exists v)\alpha] &= \bigvee_{\tau\in\mathbb{T}} [\bar{\alpha}_\tau(v/\tau)]\,, \end{aligned}$$

missä $\mathbb{T}$ on kaikkien termien joukko, $BV(\alpha)$ on kaikkien formulan α rajoitettujen muuttujien (bound variables) joukko, $FV(\tau)$ on kaikkien termin τ vapaiden muuttujien (free variables) joukko. Lisäksi $\bar{\alpha}_\tau$ saadaan, kun kaikki muuttujat $v \in BV(\alpha) \cap FV(\tau)$ korvataan sellaisilla muuttujilla, jotka eivät esiinny formulassa α tai termissä τ.

Määritelmä 4.7 ((X, M)-arvoiset tulkinnat) *Olkoon X mielivaltainen, ei-tyhjä joukko ja $M = (L, \leq, *)$ integraalinen, kommutatiivinen cl-monoidi. Olkoon lisäksi $\mathfrak{F}(X)$ kaikkien n-argumenttisten operaatioiden $f : X \times \cdots \times X \mapsto X$ joukko joukossa X ja $\mathfrak{P}(X)$ kaikkien n-argumenttisten, L* arvoisten kuvausten *$p : X \times \cdots \times X \mapsto L$ joukko. Ensimmäisen asteen formaalisen kielen $\mathscr{L}$ (X, M)-arvoinen* tulkinta *on stuktuuri (X, Θ_1, Θ_2), missä X on ei-tyhjä joukko ja*

$$\Theta_1 : \mathbb{F} \mapsto \mathfrak{F}(X),$$
$$\Theta_1 : \mathbb{P} \mapsto \mathfrak{P}(X),$$

ovat kuvauksia. Nyt $\Theta_1(\boldsymbol{f})$ on niin sanottu X-arvoinen tulkinta funktionaalisesta symbolista $\mathbf{f}$ *ja $\Theta_2(\mathbf{p})$ on niin sanottu M-arvoinen tulkinta predikaattisymbolista* $\mathbf{p}$. *(X, Θ_1) on termien* realisaatio.

Esimerkki 4.8 (Kanoninen tulkinta) Olkoon $\mathbb{T}$ kaikkien termien τ joukko. Nyt jokainen n-argumenttinen funktionaalinen symboli $\mathbf{f}$ indusoi n-argumenttisen operaation $\tilde{f} : \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}$ siten, että

$$\tilde{f}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \mathbf{f}(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Selvästi $\mathfrak{U} = (\mathbb{T}, \{\tilde{f} | \mathbf{f} \in \mathbb{F}\})$ on algebra ja $\mathbb{V}$ on joukkoalgebran $\mathfrak{U}$ vapaiden generaattoreiden systeemi. $\mathbb{V}$ on siis hyvin määriteltyjen formuloiden v_i joukko.

Olkoon lisäksi $M = (L, \leq, *)$ monoidisen predikaattilogiikan Lindenbaum algebra, $\hat{M} = (\hat{L}, \hat{\leq}, \hat{*})$ Lindenbaum algebran M *MacNeillen täydennys* ja olkoon $j : L \mapsto \hat{L}$ kanoninen kuvaus. Erikoisesti $\hat{M}$ on integraalinen, kommutatiivinen cl-monoidi. Määritellään $(\mathbb{T}, \hat{M})$-arvoinen tulkinta formaalissa kielessa $\mathscr{L}$:

- $\Psi_1(\mathbf{f}) = \tilde{f}$;
- $(\Psi_2(\mathbf{p}))(\tau_1, \ldots, \tau_n) = j([\mathbf{p}(\tau_1, \ldots, \tau_n)])$, missä $[\mathbf{p}(\tau_1, \ldots, \tau_n)]$ on formulan $\mathbf{p}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$:n kanssa loogisesti ekvivalenttien formuloiden ekvivalenssiluokka.

Systeemiä $(\mathbb{T}, \Phi_1, \Phi_2)$ kutsutaan formaalisen kielen $\mathscr{L}$ *kanoniseksi tulkinnaksi.*

Lause 4.9 *Olkoon (X, Θ_1) termien realisaatio ja olkoon kuvaus $l : \mathbb{V} \mapsto X$ X-valuaatio. Nyt on olemassa yksikäsitteinen kuvauksen l laajennus homomorfismiksi $h_l : \mathbb{T} \mapsto X$. Toisin sanoen, on olemassa kuvaus h_l, joka toteuttaa ehdot:*

(107) $h_l(v) = l(v)\ \forall v \in \mathbb{V}$.

(108) $h_l(\tilde{f}(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = (\Theta_1(\mathbf{f}))(h_l(\tau_1), \ldots, h_l(\tau_n)),\ \mathbf{f} \in \mathbb{F}$.

Todistus. Propositio on suora seuraus edellisestä esimerkistä, sillä $\mathbb{V}$ on joukkoalgebran $\mathfrak{U}$ vapaiden generaattoreiden systeemi. □

Huomautus 4.10 (1. asteen kielen algebraalinen semantiikka) Olkoon $\mathscr{L}$ ensimmäisen asteen formaalinen kieli. Olkoon (X, M) arvoinen $\mathscr{L}$:n tulkinta annettu. Nyt voidaan tietty formula $\alpha \in \mathscr{L}$ assosioida totuusarvoon. Jokainen X-arvoinen kuvaus $l : \mathbb{V} \mapsto L$ indusoi kuvauksen $\mathfrak{R}_l : \mathscr{L} \mapsto L$, joka määritellään rekursiivisesti:

- $\mathfrak{R}_l(\boldsymbol{p}(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = p(h_l(\tau_1), \ldots, h_l(\tau_n))$, missä $p = \Theta_2(\boldsymbol{p})$ ja h_l on kuvausta l vastaava homomorfismi.
- $\mathfrak{R}_l(\neg\alpha) = (\mathfrak{R}_l(\alpha)) \to 0$,
  $\mathfrak{R}_l((\alpha \wedge \beta)) = \mathfrak{R}_l(\alpha) \wedge \mathfrak{R}_l(\beta)$,
  $\mathfrak{R}_l((\alpha \vee \beta)) = \mathfrak{R}_l(\alpha) \vee \mathfrak{R}_l(\beta)$,
  $\mathfrak{R}_l((\alpha \otimes \beta)) = \mathfrak{R}_l(\alpha) * \mathfrak{R}_l(\beta)$,
  $\mathfrak{R}_l((\alpha \to \beta)) = \mathfrak{R}_l(\alpha) \to \mathfrak{R}_l(\beta)$.
- $\mathfrak{R}_l((\forall v)\alpha) = \bigwedge_{x \in X} \mathfrak{R}_{l(v/x)}(\alpha)$,

  $\mathfrak{R}_l((\exists v)\alpha) = \bigvee_{x \in X} \mathfrak{R}_{l(v/x)}(\alpha)$,

missä

$$l(v/x)(v') = \begin{cases} l(v'), & v' \neq v, \\ x, & v' = v. \end{cases}$$

Määritelmä 4.11 (M-arvoiset, epäklassiset mallit) *Olkoon $\mathscr{L}$ ensimmäisen asteen formaalinen kieli ja olkoon α hyvin määritelty formula.*

*(a) Formaalisen kielen $\mathscr{L}$ (X, M)-arvoinen tulkinta (X, Θ_1, Θ_2) on formulan α niin sanottu M-*arvoinen malli *jos ja vain jos kaikille X-valuaatioille $l : \mathbb{V} \mapsto X$ pätee $\mathfrak{R}_l(\alpha) = 1$.*

*(b) Olkoon M formaalissa kielessä $\mathscr{L}$ määritelty integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi. Hyvin määritelty formula α on niin sanottu M-*käypä *jos ja vain jos jokainen (X, M)-arvoinen $\mathscr{L}$:n tulkinta on formulan α M-arvoinen malli. Jos α on M-käypä, niin siitä käytetään merkintää $\models_M \alpha$.*

Teoreema 4.12 (Monoidisen PC:n soundness ja täydellisyys) *Olkoon α monoidisen predikaattilogiikan hyvin määritelty formula. Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivelenttisia.*

(109) $\vdash \alpha$.

(110) $\models_M \alpha$ *pätee kaikille integraalisille, kommutatiivisille cl-monoideille* M.

Todistus. Koska predikaattilogiikan päättelysäännöt säilyttävät "totuusarvonsa", huomautuksen 4.10 konstruktion perusteella ominaisuus (109) implikoi ominaisuuden (110) . Tarkastellaan nyt Monoidisen predikaattilogiikan Lindenbaum algebran MacNeillen täydennystä $\hat{M}$ ja formaalisen kielen $\mathscr{L}$ kanonista tulkintaa $(\mathbb{T}, \Psi_1), \Psi_2$. Nyt voidaan $\mathbb{T}$-valuaationa käyttää kanonista injektiota $l_0 : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{T}$, jolloin havaitaan, että

$$\mathfrak{R}_{l_0}(\alpha) = j([\alpha]).$$

Koska $1 = \{\alpha \in L | \vdash \alpha\}$, niin ominaisuus (109) implikoi ominaisuuden (110) ja ekvivalenssi on todistettu. □

Korollaari 4.13 (Intuitiivisen PC:n soundness ja täydellisyys) *Olkoon α intuitiivisen predikaattilogiikan hyvin määritelty formula. Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalenttisia.*

(111) $\vdash \alpha$.

(112) $\models_H \alpha$ *pätee kaikille täydellisille Heytin algebroille* H.

Todistus. Koska Heyting algebra säilyttää ominaisuutensa MacNeillen täydennyksessä, tulos on suora seuraus teoreemasta 4.12. □

Korollaari 4.14 (Lineaarisen logiikan soundness ja täydellisyys) *Olkoon α Girardin integraalisen, kommutatiivisen, lineaarisen predikaattilogiikan PC hyvin määritelty formula. Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalenttisia.*

(113) $\vdash \alpha$.

(114) $\models_G \alpha$ *pätee kaikille integraalisille Girard monoideille* G.

Todistus. Koska Girard monoidi säilyttää ominaisuutensa MacNeillen täydennyksessä, tulos on suora seuraus teoreemasta 4.12. □

Łukasiewiczin predikaattilogiikka on sound, mutta epätäydellinen (ei todisteta). Tämän ongelman kiertämiseksi lisätään Łukasiewiczin logiikkaan uusi päättelysääntö:

($\mathfrak{R}$) Formulasta $(\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \ldots(\alpha \to \neg\alpha)\ldots))$ seuraa α.

Kun Łukasiewiczin predikaattilogiikkaan lisätään edellinen päättelysääntö, saadaan *modifioitu* Łukasiewiczin predikaattilogiikka, jota merkitään ŁPC^*.

Teoreema 4.15 (ŁPC^*-logiikan soundness ja täydellisyys) *Olkoon α ŁPC^*-logiikan hyvin määritelty formula. Olkoon lisäksi $I = ([0,1], \leq, T_m)$ kanoninen MV-algebra struktuuri yksikkövälillä $[0,1]$ (ks. teoreema 4.6). Seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalenttisia.*

(115) $\vdash \alpha$.

(116) $\models_M \alpha$ *pätee kaikille täydellisille MV-algebroille M.*

(117) $\models_I \alpha$

Todistus. Koska ŁPC^*:n Lindenbaum algebra on semi-simple, MacNeillen täydennys säilyttää MV-algebrarakenteen. Lisäksi Tarskin Lemma pätee. Nyt tulos seuraa suoraan. □

4.2 Monoidiseen logiikkaan perustuva identiteetin ja olemassaolon formaalinen teoria

Käsitteinä *identiteetti* sekä alkioiden tai partikkelien *paikallinen olemassaolo* ovat tärkeitä ominaisuuksia ja matemaattisia työkaluja, mikä tullaan huomaamaan erityisesti sumean säätöteorian yhteydessä. Tässä luvussa täydennetään monoidinen predikaattilogiikkaa niin, että predikaattisymbolien joukkoon $\mathbb{P}$ lisätään kaksi oleellista predikaattia:

- Yksiargumenttinen, *olemassaolon ulottuvuudeksi*(*extent on existence*) tulkittava predikaattisymboli e.
- Binäärinen, *identiteetin* käsitettä vastaava predikaattisymboli $[\![\,,\,]\!]$.

Sumean logiikan jäsenyysfunktio vastaa tietyssä mielessä olemassaolon ulottuvuutta ja sen arvo jäsenyysastetta. Identiteetin ja olemassaolon formaalinen teoria $\mathfrak{IE}$ sisältää monoidisen predikaattilogiikan aksioomat ja päättelysäännöt. $\mathfrak{IE}$ perustuu seuraaviin identiteetin ja olemassaolon aksioomiin:

(118)	$([\![\tau_1, \tau_2]\!] \to (e(\tau_1) \wedge e(\tau_2)))$,	(strictness)
(119)	$(e(\tau) \to [\![\tau, \tau]\!])$,	(refleksiivisyys)
(120)	$([\![\tau_1, \tau_2]\!] \to [\![\tau_2, \tau_1]\!])$,	(symmetrisyys)

$$(121)\qquad \left(e\left(\mathbf{f}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n)\right) \to \bigwedge_{i=1}^{n} e(\tau_i)\right),$$
$$(\llbracket \sigma_i, \bar{\sigma}_i \rrbracket \to \llbracket \mathbf{f}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\sigma_i,\ldots\tau_n), \mathbf{f}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\bar{\sigma}_i,\ldots\tau_n)\rrbracket),$$

$$(122)\qquad \left(\mathbf{p}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n) \to \bigwedge_{i=1}^{n} e(\tau_i)\right),$$
$$\left((e(\sigma_i) \to \llbracket \sigma_i, \bar{\sigma}_i \rrbracket) \to (\mathbf{p}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\sigma_i,\ldots\tau_n) \to \mathbf{p}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\bar{\sigma}_i,\ldots\tau_n))\right).$$

Aksiooman (118) sisältönä on *identiteetti implikoi olemassaolon.* Aksioomista saadaan

$$\begin{array}{lr}
\vdash (\llbracket \sigma, \bar{\sigma} \rrbracket \to (e(\sigma) \wedge e(\bar{\sigma}))), & (118) \\
\vdash ((e(\sigma) \wedge e(\bar{\sigma})) \to e(\bar{\sigma})), & (79) \\
\vdash (\llbracket \sigma, \bar{\sigma} \rrbracket \to e(\bar{\sigma})). & (*)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\vdash ((e(\sigma) \to \llbracket \sigma, \bar{\sigma} \rrbracket) \to ((\llbracket \sigma, \bar{\sigma} \rrbracket \to e(\bar{\sigma})) \to (e(\sigma) \to e(\bar{\sigma})))), & (73) \\
\vdash ((\llbracket \sigma, \bar{\sigma} \rrbracket \to e(\bar{\sigma})) \to ((e(\sigma) \to \llbracket \sigma, \bar{\sigma} \rrbracket) \to (e(\sigma) \to e(\bar{\sigma})))). & (80), (83), (84)
\end{array}$$

Niinpä Modus Ponensin perusteella kaava

$$\vdash ((e(\sigma) \to \llbracket \sigma, \bar{\sigma} \rrbracket) \quad \to \quad (e(\sigma) \to e(\bar{\sigma}))),$$

pätee, joten e toteuttaa aina aksiooman (122).

Aksioomista (119),(118), (73) ja (79) seuraa suoraan relaatio

$$\vdash (e(\sigma) \leftrightarrow \llbracket \tau, \tau \rrbracket).$$

Aksioomat (121) ja (122) osoittavat kaikkien funktionaalisten sekä predikaattisymbolien tietynlaisen yhteensopivuuden suhteessa symboleihin e ja $\llbracket\,,\,\rrbracket$.

Esimerkki 4.16 [3] Olkoon $M = (L, \leq, *)$ integraalinen, residuoitu, kommutatiivinen l-monoidi ja X ei-tyhjä joukko. Olkoon lisäksi kuvaus $E : X \times X$ M-arvoinen yhtäsuuruus joukossa X. Identiteetin ja olomassaolon ulottuvuuden formaalisen teorian M-arvoinen malli on pari (X, E) siten, että joukko $\mathbb{F}$ on tyhjä ja $\mathbb{P} = \{e, \llbracket\,,\,\rrbracket\}$. Lisäksi, pari (X, E) on myös M-arvoinen joukko.

4.3 Aliobjektien luokitteludiagrammit

Lattiisiarvoisia kuvauksia voidaan ajatella tietynlaisten - niin sanottujen *sumeiden joukkojen*- jäsenyysfunktioina.

Tarkastellaan aluksi kategoriaa **SET**, jossa $\{0,1\}$-arvoiset kuvaukset kuvaavat osajoukkoja. Olkoon $t : \{\cdot\} \mapsto \{0,1\}$ kuvaus, jolle on määritelty $t(\cdot) = 1$. Nyt, jokaiselle $\{0,1\}$ -arvoiselle kuvaukselle χ, jonka määrittelyjoukko on X, on olemassa yksikäsitteinen osajoukko $U \subseteq X$ siten, että

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, tail, "i_U"'] & \{\cdot\} \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\chi"'] & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

on pullback neliö, missä kuvaus i_U on inkluusio joukosta U joukkoon X. Toisaalta, koska U on joukon X osajoukko, niin on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $\chi_U : X \mapsto \{0,1\}$ siten, että

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, tail, "i_U"'] & \{\cdot\} \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\chi_U"'] & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

on pullback neliö.

Olkoon $M = (L, \leq)$ integraalinen, kommutatiivinen cl-monoidi ja olkoon M-**SET** erillisten, M-arvoisten joukkojen kategoria. Monoidisen logiikan merkittävä ongelma on tutkia, onko olemassa sellaista kategoriaa **C**, joka koostuu objekteista Ω sekä nuolista $t : \mathbf{1} \mapsto \Omega$, (missä $\mathbf{1}$ on kategorian **C** terminaaliobjekti,) jolle pätevät seuraavat ominaisuudet:

1. Lattiisiarvoiset kuvaukset voidaan tulkita **C**-morfismeina, joiden maalijoukko on Ω;

2. Jokaiselle **C**-morfismille $\chi : X \mapsto \Omega$ isomorfismista riippuva, yksikäsitteinen aliobjekti $U \overset{i_U}{\mapsto} X$ siten, että

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, tail, "i_U"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

on pullback neliö;

3. Olkoon $U \overset{i_U}{\rightarrowtail} X$ joukon X aliobjekti ja olkoon pari (χ_1, χ_2) $\mathbf{C}$-morfismeja, joille diagrammit

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, tail, "i_U"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "t"] & U \arrow[r] \arrow[d, tail, "i_U"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\chi_1"'] & \Omega & X \arrow[r, "\chi_2"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

ovat pullback neliöitä, jolloin $\chi_1 = \chi_2$;

4. Kategoria $\mathbf{C}$ on monadinen suhteessa kategoriaan M-$\mathbf{SET}$.

Ainakin GL-monoidien M tapauksessa tällainen kategoria on olemassa [5].

Huomautus 4.17 (Vapaasti generoidut, erilliset monoidikimput) Olkoon (X, E) M-arvoinen joukko. Sen *standardi singletoni* on sellainen kuvaus $s : X \mapsto L$, että on olemassa alkiot $x \in X$ sekä $\alpha \in L$ siten, että

$$s(z) := s_{(x,\alpha)}(z) = (E(x, x) \to \alpha) * E(x, z).$$

Olkoon $\tilde{X}$ kaikkien joukon (X, E) standardi singletonien joukko. Joukossa $\tilde{X}$ määritellään M-arvoinen yhtäsuuruus $\tilde{E}$ ja rajoituskuvaus $\restriction: \tilde{X} \times L \mapsto \tilde{X}$ siten, että

$$\begin{aligned} \tilde{E}(s_{(x,\alpha)}, s_{(y,\beta)}) &= \left(\left(\bigvee_{z\in X} s_{(x,\alpha)}(z)\right) * \left(\bigwedge_{z\in X} s_{(x,\alpha)}(z) \to s_{(y,\beta)}(z)\right)\right) \\ &\quad \wedge \left(\left(\bigvee_{z\in X} s_{(y,\beta)}(z)\right) * \left(\bigwedge_{z\in X} s_{(y,\beta)}(z) \to s_{(a,\alpha)}(z)\right)\right), \\ (s_{(x,\alpha)} \restriction \gamma)(z) &= ((E(x, x) \wedge \alpha) \to \gamma) * s_{(x,\alpha)}(z), \qquad z \in X. \end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että

$$\begin{aligned}\tilde{E}(s_{(x,\alpha)}, s_{(y,\beta)}) &= E(x,y) * ((E(x,x) \to \alpha) \wedge (E(y,y) \to \beta)),\\ s_{(x,\alpha)} \restriction \gamma &= s_{(x,(\alpha\wedge\gamma))}.\end{aligned}$$

Lemman 2.30 perusteella $(\tilde{X}, \tilde{E}, \restriction)$ on GL-monoidin M kimppu. Lisäksi $\tilde{E}$ on erillinen ja relaatiosta

$$E(x,x) \wedge \alpha \leq \tilde{E}(s_{(x,\alpha)}, s_{(y,\beta)})$$

voidaan helposti johtaa

$$\begin{aligned}s_{(x,\alpha)}(z_0) &= (E(x,x) \wedge \alpha) * ((E(x,x) \wedge \alpha) \to s_{(x,\alpha)}(z_0))\\ &\leq s_{(x,\alpha)}(z_0) * \left(\bigwedge_{z\in X} s_{(x,\alpha)}(z) \to s_{(y,\beta)}(z) \right)\\ &\leq s_{(y,\beta)}(z_0).\end{aligned}$$

Niinpä $(\tilde{X}, \tilde{E}, \restriction)$ on erillinen, joukon (X, E) vapaasti generoima, monoidin M kimppu.

Esimerkki 4.18

(a) Olkoon kuvaus $\restriction: L \times L \mapsto L$ määritelty yhtälöllä $\alpha \restriction \gamma = \alpha \wedge \gamma$. Silloin $\mathbf{1} = (L, \wedge, \restriction)$ on erillinen, joukon $(\{\cdot\}, \approx)$ vapaasti generoima, monoidin M kimppu. Edellä relaatio $\cdot \approx \cdot = \mathbf{1}$.

(b) Olkoon R_L kaikkien parien $(\alpha, \lambda) \in L \times L$ joukko siten, että $\lambda \leq \alpha$. Määritellään kuvaukset $E_L : R_L \times R_L \mapsto L$ ja $\rho_L : R_L \times L \mapsto R_L$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}E_L((\alpha,\lambda),(\beta,\mu)) &= (\alpha * (\lambda \to \mu)) \wedge (\beta * (\mu \to \lambda)),\\ \rho_L((\alpha,\lambda),\gamma) &= ((\alpha \wedge \gamma), (\lambda \wedge \gamma)).\end{aligned}$$

$\Omega = (R_L, E_L, \rho_L)$ on erillinen monoidikimppu (lemma 6.1 [5]).

(c) **(Metristen avaruuksien standardi singletonit)** Tarkastellaan yksikköväliä $[0,1]$ täydellisenä MV-algebrana. Toisin sanoen tarkastellaan monoidia $M = ([0,1], \leq, T_m)$. Silloin jokainen metriikka $\delta : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ indusoi M-arvoisen yhtäsuuruuden E_δ joukossa X seuraavasti:

$$E_\delta(x,y) = \max(1 - \delta(x,y), 0).$$

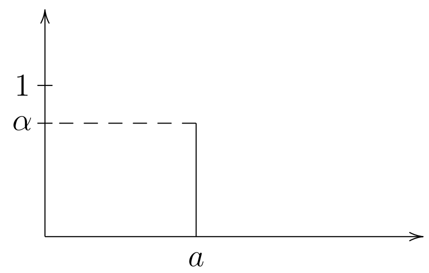
Viitaten huomautukseen 4.17 jokainen metrinen avaruus (X, δ) indusoi erillisen, joukon (X, E_δ) vapaasti generoiman monoidikimpun.

Sumean säätöteorian ongelmissa reaaliakselin $\mathbb{R}$ standardi singletonit määritellään suhteessa kahteen joukon $\mathbb{R}$ metriikkaan:

$$\begin{aligned} \delta_{dis}(x,y) &= \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}, \\ \delta_\epsilon(x,y) &= \frac{1}{\epsilon} \cdot |x-y|. \end{aligned}$$

Diskreetissä metriikassa δ_{dis} standardi singletoni (kuva 1) määritellään seuraavasti:

$$s_{(a,\alpha)}(x) = \begin{cases} \alpha, & x = a \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$$



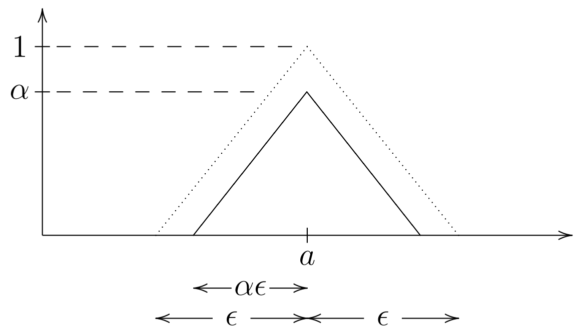
Kuva 1

$s_{(a,\alpha)}(x)$ tyyppiset funktiot ovat toisinaan kirjallisuudessa esiintyneet nimellä *sumeat pisteet.*

Jatkuvassa metriikassa δ_ϵ standardi singletonit ovat kolmiomaisia funktioita (kuva 2):

$$s_{(a,\alpha)}(x) = \begin{cases} 0, & |a - \alpha \cdot \epsilon| < x \\ \frac{1}{\epsilon} \cdot (x-a) + \alpha, & a - \alpha \cdot \epsilon \leq x < a \\ \frac{1}{\epsilon} \cdot (a-x) + \alpha, & a \leq x \leq a + a \cdot \epsilon \end{cases}.$$

Tällaiset kolmiomaiset funktiot ovat tärkeässä osassa sumeassa säätöteoriassa.



Kuva 2

Erillisten, monoidin M kimppujen kategoria $\mathbf{SPSH}(M)$ koostuu

- *objekteista*, jotka ovat erillisiä, monoidin M kimppuja (X, E, ρ),
- *morfismeista*, jotka ovat rakenteensa säilyttäviä kuvauksia, toisin sanoen $\phi : (X_1, E_1, \rho_1) \mapsto (X_2, E_2, \rho_2)$ on kimppumorfismi jos ja vain jos kuvaus $\phi : X_1 \mapsto X_2$ toteuttaa aksioomat

$$E_1(x, x) = E_2(\phi(x), \phi(x)), \qquad x \in X_1, \tag{123}$$
$$E(x_1, \bar{x}_1) \leq E_2(\phi(x_1), \phi(\bar{x}_1)), \qquad x_1, \bar{x}_1 \in X_1, \tag{124}$$
$$\phi(\rho_1(x, \alpha)) = \rho_2(\phi(x), \alpha), \qquad x \in X_1. \tag{125}$$

Olkoon (X, E) M-arvoinen joukko ja $h : X \mapsto L$ kuvaus, joka toteuttaa ehdot

$$h(x) \leq E(x, x), \qquad \text{(strictness)} \tag{126}$$
$$(E(x, x) \to E(x, y)) * h(x) \leq h(y). \qquad \text{(extensionality)} \tag{127}$$

Identiteetin ja olemassaolon formaalisen teorian yhteydessä kuvaus h voidaan tulkita yksiargumenttisen predikaatin M-arvoisena tulkintana. Koska h on strict, se indusoi kuvauksen $h^* : X \mapsto R_L$, jolle

$$h^*(x) = (E(x, x), h(x)), \qquad x \in X.$$

Erikoisesti, ehto (127) on ekvivalenttinen ehdolle

$$E(x, y) \leq E_L(h^*(x), h^*(y)), \qquad x, y \in X.$$

Koska (X, E) generoi vapaasti kimpun $(\tilde{X}, \tilde{E}, \restriction)$ voidaan kuvaus h^* yksikäsitteisesti laajentaa kimppumorfismiksi $h^\# : (\tilde{X}, \tilde{E}, \restriction) \mapsto \Omega = (R_L, E_L, \rho_L)$. Kuvaus $h^\#$ määritellään

$$h^\#(s_{(x,\alpha)}) = ((E(x,x) \wedge \alpha), (h(x) \wedge \alpha)).$$

Koska

$$\left(\bigvee_{z \in X} s_{(x,\alpha)}(z)\right) * \left(\bigwedge_{z \in X} s_{(x,\alpha)}(z) \mapsto h(z)\right) = h(x) \wedge \alpha,$$

voidaan $h(x) \wedge \alpha$ ajatella standardi singletonin $s_{(x,\alpha)}$ jäsenyysasteeksi kuvauksessa h.

$\mathbf{1} = (L, \wedge, \restriction)$ on kategorian $\mathbf{SPSH}(M)$ terminaali objekti. Lisäksi, koska $(\{\cdot\}, \approx)$ generoi vapaasti objektin $\mathbf{1}$, kuvauksella $c : \{\cdot\} \mapsto R_L$, joka määritellään $c(\cdot) = (1, 1)$, on yksikäsitteinen laajennus kimppu-morfismiksi $t := c^\# : \mathbf{1} \mapsto \Omega$. Jos $\alpha \in L$ tulkitaan kuvauksen "**tosi**" määrittelyjoukoksi (tässä "**tosi**", jolla on tyhjä määrittelyjoukko, on "**epätosi**"). Silloin kuvaus t on niin sanottu *nuoli tosi*. Erikoisesti, t määritellään

$$t(\alpha) = (\alpha, \alpha), \qquad \alpha \in L.$$

Nyt voidaan tarkastella kategorian $\mathbf{SPSH}(M)$ aliobjektin luokitteludiagrammia. Olkoon (X, E) M-arvoinen joukko ja $h : X \mapsto L$ jäsenyysfunktio (eli lattiisiarvoinen kuvaus), joka toteuttaa ehdot (126) ja (127). Koska $\mathbf{SPSH}(M)$ on täydellinen kategoria, voidaan diagrammin

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[d] \\ (\tilde{X}, \tilde{E}, \restriction) \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

pullback määrittää. Valitaan aliobjekti (U, F, ρ) siten, että diagrammi

$$\begin{tikzcd} (U, F, \rho) \arrow[r] \arrow[d, tail, "\phi"'] & \mathbf{1} \arrow[d] \\ (\tilde{X}, \tilde{E}, \restriction) \arrow[r, "h^\#"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

on pullback neliö. Monoidin M alikimppu (U, F, ρ) määritellään siten, että

$$U = \left\{ s_{(x,\alpha)} \in \tilde{X} | h(x) \wedge \alpha = E(x,x) \wedge \alpha \right\},$$
$$F = \tilde{E}|_{U \times U}, \qquad \rho(u,\alpha) = u \restriction \alpha, \qquad u \in U.$$

Erikoisesti, ϕ on inkluusiokuvaus joukosta U joukkoon $\tilde{X}$. Lisäksi seuraava ekvivalenssi pätee:

$$s_{(x,\alpha)} \in U \quad \Leftrightarrow \quad s_{(x,\alpha)}(z) \leq h(z) \qquad \forall z \in X.$$

Standardi singletonin $s_{(x,\alpha)}$ määritelmän sekä kuvauksen h extensionaalisuuden (ehto (127)) perusteella edellä esitetty ekvivalenssi perustuu seuraavaan relaatioon:

$$\begin{aligned} s_{(x,\alpha)} &= (E(x,x) \rightarrow \alpha) * E(x,z) \\ &= (E(x,x) \wedge \alpha) * (E(x,x) \rightarrow E(x,z)) \\ &= (h(x) \wedge \alpha) * (E(x,x) \Leftarrow E(x,z)) \\ &\leq h(z). \end{aligned}$$

Niinpä joukko U koostuu kaikista kuvaukseen h kuuluvista standardi singletoneista $s_{(x,\alpha)}$.

Jos on olemasssa sellainen ehdot (126) ja (127) toteuttava kuvaus $k : X \mapsto L$, että $k^{\#}$ luokittelee alikimpun (U, F, ρ), toisin sanoen diagrammi

$$\begin{tikzcd} (U,F,\rho) \arrow[r] \arrow[d, tail, "\phi"'] & \mathbf{1} \arrow[d] \\ (\tilde{X}, \tilde{E}, \restriction) \arrow[r, "k^{\#}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

on pullback neliö, niin

$$U = \left\{ s_{(x,\alpha)} \in \tilde{X} | E(x,x) \wedge \alpha = k(x) \wedge \alpha \right\}.$$

Tällöin kaikille $x, z \in X$ pätee

$$s_{(x,h(x))}(z) \leq k(z),$$
$$s_{(x,k(x))}(z) \leq h(z).$$

Koska kuvaukset h ja k toteuttavat ehdot (126) ja (127), relaatiot

$$\begin{aligned} h(z) &= \bigvee_{x \in X} s_{(x,h(x))} \leq k(z) \\ k(z) &= \bigvee_{x \in X} s_{(x,k(x))} \leq h(z) \end{aligned}$$

pätevät ja kuvaukset h ja k ovat näin ollen yhtenevät.

Luku päätetään epäklassisen malliteorian oleelliseen havaintoon:

Lause 4.19 *Olkoon $M = (L, \leq, *)$ GL-monoidi. Jokainen lattiisiarvoinen kuvaus eli ehdot IE6 ja IE6' toteuttava jäsenyysfunktio h voidaan indentifioida monoidin M alikimpun perusteella, joka koostuu kaikkien kuvaukseen h kuuluvien standardi singletonien joukosta. Jokainen luokiteltava, monoidin M vapaasti generoima alikimppu on* **sumea joukko**.

Luku 5

Poincarén paradoksi ja sumea säätöteoria

Tässä luvussa esitetään sumean säätöteorian metodien matemaattinen semantiikka. Useissa tarkasteluissa sumean säätöteorian tulokset perustuvat lähinnä annetun säätöongelman intuitiiviseen ymmärrykseen eikä niinkään matematiikkaan. Luvussa pohditaan perustuvatko Mamdanin metodin[1] JOS-NIIN säännöt loogiseen deduktioon vai ainoastaan yksinkertaisiin toimintaohjeisiin. Lisäksi tutustutaan Poincarén paradoksiin sekä sumean säätöteorian perusilmiöihin syötteen ja tulosteen *tunnistamattomuuteen* sekä *lokaaliseen olemassaoloon*.

5.1 Tunnistamattomuus ja epätransitiivisyys

Monissa todellisissa käytännön ongelmissa jonkin luvun tarkka arvo ei ole niin tärkeä kuin datan (objektien) "koko". Tunnistamisprosessi itsessään määrää usein datan koon. Esimerkiksi kaksi reaalilukua a ja b ovat tunnistettavissa, mikäli niiden erotusten arvo on pienempi kuin jokin tilanteesta riippuva, annettu reaaliluku ϵ:

$$a \approx_\epsilon b \quad \Leftrightarrow \quad |a - b| < \epsilon.$$

Selvästi $\approx_\epsilon$ on refleksiivinen ja symmetrinen, mutta epätransitiivinen relaatio joukossa $\mathbb{R}$. Tämän kaltainen ilmiö on varsin yleinen klusterianalyysissä.

Refleksiivisten, symmetristen ja epätransitiivisten ilmiöiden merkittävyys ei ole uusi: Poincaré tutki niitä 1900-luvun alussa. Diskreettejä alkioita voidaan

[1]Mamdanin metodi on yleisin käytetty sumean säätöteorian metodologia. Tässä ei tarkemmin perehdytä kyseiseen metodiin, mutta referenssinä voi käyttää teosta [8].

kiistatta laskea. Seitsemän kääpiötä on tasan seitsemän kääpiötä, ei 6,89 tai 7,03 kääpiötä. Sen sijaan jatkuvuus tuo ongelmia. Pisteen sijainnin suoralla voi määrittää vain tietyllä tarkkuudella. Piste on koordinaatissa noin 7.

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A \neq C. \qquad \text{(Poincarén paradoksi)}$$

Jatkuvassa systeemissä alkio voi olla tunnistamaton kahdesta muusta alkiosta, jotka kuitenkin ovat keskenään tunnistettavia.

Toisin kuin ekvivalenssirelaatioille, refleksiiviselle, symmetrisille, mutta epätransitiivisille relaatioille ei ole olemassa tekijäluokkia.

Edellisen havainnon perusteella tunnistamisprosessin selkeä, matemaattinen ymmärrys puuttuu. Tarkastellaan esimerkkinä relaatiota $\approx_\epsilon$. Vaikka annetussa kokeellisessa ympäristössä olisikin jonkinlainen intuitio datan koosta, sen matemaattinen malli ei kuitenkaan ole ilmeinen. Olkoon $\mathfrak{E}_1$ ja $\mathfrak{E}_2$ ekvivalenssirelaatioita reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ siten, että

$$\chi_{\mathfrak{E}_1} \leq 1 - \rho_\epsilon \leq \chi_{\approx_\epsilon} \leq \chi_{\mathfrak{E}_2},$$

missä

$$\rho_\epsilon(x, y) = \min\left(1, \frac{1}{\epsilon} \cdot |x - y|\right).$$

Silloin $\mathfrak{E}_1 = \Delta_{\mathbb{R}}$ on diskreetti, refleksiivinen relaatio ja $\mathfrak{E}_2$ vastaa epädiskreettiä relaatiota, eli $\mathfrak{E}_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ekvivalenssirelaatiota $\mathfrak{E}_1$ ei voi johtaa havaintojen perusteella. Toisaalta relaatio $\mathfrak{E}_2$ tunnistaa kaikki reaaliluvut ja se on ristiriidassa intuitiivisen kokokäsityksen kanssa.

Niin sanotut *hämärät kappaleet* (*hazy lumps*) kuvaavat osaltaan jatkuvuutta matemaattisesti johdonmukaisesti. Niitä voidaan ajatella samaistumiselle (overlap) ja eriytymiselle (apartness) yhteisinä todennäköisyysrelaatioina, joista tietty metriikka rakennetaan.

Huomautus 5.1 (Hämärät kappaleet ja sumeat yhtäsuuruudet) (vert. 2.24) Olkoon X ei-tyhjä joukko, joka koostuu hämäristä kappaleista. Kuvaus $E : X \times X \mapsto [1, 0]$ on niin sanottu *sumea yhtäsuuruus* joukossa X jos E toteuttaa aksioomat

$$E(x, y) \leq \min(E(x, x), E(y, y)) \tag{128}$$

$$E(x, y) = E(y, x) \tag{129}$$

$$E(x, y) + E(y, z) - E(y, y) \leq E(x, z). \tag{130}$$

Silloin arvo $E(x,y)$ kuvaa alkioiden x ja y samaistumista ja $E(x,x)$ olemassaolon ulottuvuutta eli alkion x samaistumista itsensä kanssa. Erikoisesti, x ja y ovat tunnistamattomuuden ja eriytymisen välimaastossa jos ja vain jos relaatio

$$0 < E(x,y) < \min(E(x,x), E(y,y))$$

pätee. Lisäksi, avaruuden metriikka voidaan määrätä seuraavasti: jokainen sumea yhtäsuuruus E joukossa X indusoi pseudometriikan ρ_E joukossa X siten, että

$$\rho_E = \frac{E(x,x) + E(y,y)}{2} - E(x,y).$$

(a) Olkoon E sumea yhtäsuuruus joukossa X ja $0 < E(x,x)$ kaikilla $x \in X$. Silloin $\mathfrak{R}_E := \{(x,y) \in X \times X | 0 < E(x,y)\}$ on refleksiivinen, symmetrinen, mutta epätransitiivinen binäärirelaatio. Nyt (X,E) voidaan ajatella matemaattisena mallina, joka ei ole ristiriidassa Poincarén paradoksin kanssa.

(b) Jokainen pseudometrinen kuvaus ρ joukossa X ja jokainen kuvaus d : $X \mapsto [0,1]$, jolle $|d(x) - d(y)| \leq \rho(x,y)$, määrittelevät sumean yhtäsuuruuden $E_{(\rho,d)}$ seuraavasti:

$$E_{(\rho,d)}(x,y) = \max(d(x) + d(y) - \rho(x,y) - 1, 0), \qquad x, y \in X.$$

Tarkastellaan kanonista MV-algebrarakennetta yksikkövälillä $[0,1]$, toisin sanoen $I = ([0,1], \leq, T_m)$. Erikoisesti, Łukasiewiczin implikaatio $\rightarrow$ määritellään yhtälöllä $x \rightarrow y = \min(1 - x + y, 1)$. Aksioomien (128)-(130) perusteella sumeat yhtäsuuruudet sekä identiteetin ja olemassaolon formaalisen teorian ($\mathfrak{IE}$) I-arvoiset mallit suhteessa Łukasiewiczin logiikkaan ovat sama asia.

Łukasiewiczin logiikka aiheuttaa joitakin ristiriitatilanteita. Esimerkiksi hyvin määritelty formula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ ei ole todistuva Łukasiewiczin lauselogiikassa. Niinpä Łukasiewiczin logiikan aksioomat eli niin sanotut Wajsbergin aksioomat eivät ole ristiriidassa Poincarén paradoksin kanssa. Erikoisesti, hyvin määritelty formula

$$(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$$

ei ole todistuva Łukasiewiczin logiikassa teorian $\mathfrak{IE}$ puitteissa.

5.2 Sumean säätöteorian matemaattinen semantiikka

Sumeat yhtäsuuruudet tai toisaalta yleisemmin M-arvoiset yhtäsuuruudet GL-monoidissa M voidaan ajatella sumean säätöteorian matemaattisen semantiikan perustana. Säädettävä ympäristö koostuu systeemistä S, joukon X syötteistä sekä joukon Y tulosteista. X on usein syötteen muuttujien mitattujen arvojen joukko ja Y tulosteen muuttujien arvojen joukko. *Sumeaa* systeemiä karakterisoi tilamuuttujien (kuten partikkelin paikka tai nopeus) arvojen tunnistamattomuus. Kun systeemille S suunnitellaan säätäjää, pitää määrittää spesifit funktiot, jotka liittävät toisiinsa tietyn syötteen ja tulosteen. Sumean säädön tapauksessa tämä on varsin monimutkaista. Tunnistamattomuuden takia tarkat tilamuuttujien arvojen mittaukset ovat mahdottomia. Yritetään löytää tälle ongelmalle ratkaisu.

Tarkastellaan systeemin S dataa tietyn sumean klusterianalyysin avulla, jolloin saadaan summittainen käsitys syötteiden ja tulosteiden arvoista. Erikoisesti tällä lähestymisellä päästään annetun syöteavaruuden (toisaalta tulosteavaruuden) *sumeaan partitioon.* Usein lattiisiarvoiset (toisaalta [0,1]-arvoiset) kuvaukset A, B, ... kuvaavat näitä arvoja. Systeemin S dynamiikkaa kuvaavat äärellinen kokoelma JOS-NIIN sääntöjä.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Jos } x \text{ on } A_1 & \text{niin} & y \text{ on } B_1. \\
\text{Jos } x \text{ on } A_2 & \text{niin} & y \text{ on } B_2. \\
\vdots & & \vdots \\
\text{Jos } x \text{ on } A_n & \text{niin} & y \text{ on } B_n.
\end{array}$$

Yhdistetään saatu informaatio ja esitetään systeemin S dynaaminen käyttäytyminen (ristiriidattomasti Mamdanin metodin kanssa) kuvauksella $R : X \times X \mapsto L$, jolle

$$R(x, y) = \bigvee_{i=1}^{n} A_i(x) \wedge B_i(y) \qquad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Säätöfunktion löytämiseksi on vielä kaksi oleellista ongelmaa:

- Jotta viipale syötettä saataisiin käyttöön, tarvitaan *sumentava* (*fuzzification*) operaattori joukossa X.
- Jotta sumeasta relaatiosta R saadaan johdettua viipale tulostetta, tarvitaan *täsmentävä* (*defuzzification*) operaattori.

Kirjaallisuudessa yleisesti esitettävät metodit ovat varsin intuitiivisia ilman uskottavaa matemaattista semantiikkaa. Epäklassisen malliteorian tulokset otetaan nyt käyttöön, kun sumealle säätöteorialle luodaan tarvittava matemaattinen pohja. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $M = (L, \leq, *)$ on GL-monoidi, missä operaatio $*$ distributiivinen suurimman alarajan suhteen:

$$\alpha * \left(\bigwedge_{i \in I} \beta_i \right) = \bigwedge_{i \in I} (\alpha * \beta_i).$$

Tämä ominaisuus on selvästi voimassa myös täydellisissä Heyting algebroissa kuten täydellisissä MV-algebroissakin.

Määritelmä 5.2 (Singletoni) *Olkoon* (X, E) *M-arvoinen joukko. Kuvaus* $s : X \mapsto L$ *on* singletoni *jos se täyttää seuraavat ehdot:*

$$s(x) * (E(x,x) \to E(x,y)) \leq s(y), \qquad \text{(extensionality)} \tag{131}$$

$$(\mathbb{E}(s) \to s(x)) * s(y) \leq E(x,y), \qquad \text{(singletoni ehto)} \tag{132}$$

missä $\mathbb{E}(s) = \bigvee_{x \in X} s(x)$.

Ehdon (132) perusteella jokainen singletoni s on strict eli $s(x) \leq E(x,x)$. Niinpä singletonit voidaan ajatella *lokaaleina pisteinä* ja arvot $\mathbb{E}(s)$ singletonin s olemassaolon ulottuvuutena. Lisäksi standardi singletonit ovat aina myös singletoneja.

Teoreema 5.3 (Sumeat partitiot) *Olkoon* $\mathfrak{F} = \{f_i | i \in I\}$ *L-arvoisten kuvausten* $f_i : X \mapsto L$ *perhe ja olkoon* $\mathbb{E}(f_i)$ *kuvauksen* f_i *korkeus (eli* $\mathbb{E}(f_i) = \bigvee_{x \in X} f_i(x)$*). Silloin seuraavat ominaisuudet ovat ekvivalenttisia:*

(133) *On olemassa M-arvoinen yhtäsuuruus* E *joukossa* X *siten, että kaikki kuvaukset* f_i *ovat singletoneja suhteessa M-arvoiseen yhtäsuuruuteen* E*. Lisäksi* $E(x,x) = \bigvee_{i \in I} f_i(x)$ *kaikilla* $x \in X$.

(134) *Kaikille pareille* $(f_i, f_j) \in \mathfrak{F}$ *pätee relaatio*

$$\begin{aligned} &\bigvee_{x \in X} \left(\left(\left(\bigvee_{l \in I} f_l(x) \right) \to f_i(x) \right) * f_j(x) \right) \\ \leq \quad &\left(\mathbb{E}(f_i) * \left(\bigwedge_{y \in X} (f_i(y) \to f_j(y)) \right) \right) \\ &\wedge \left(\mathbb{E}(f_j) * \left(\bigwedge_{y \in X} (f_j(y) \to f_i(y)) \right) \right). \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon E sellainen M-arvoinen yhtäsuuruus joukossa X, että ehto (133) on voimassa. Silloin ominaisuuksien (131) ja (132) perusteella saadaan seuraavat epäyhtälöt:

$$\begin{aligned} & f_i(y) * (\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x)) * \left(\left(\bigvee_{l \in I} f_l(x) \right) \to f_j(x) \right) \\ \leq \;& E(x,y) * (E(x,x) \to f_j(x)) \\ \leq \;& f_j(y). \end{aligned}$$

Nyt

$$\bigvee_{x \in X} f_i(x) * \left(\left(\bigvee_{l \in I} f_l(x) \right) \to f_j(x) \right) \;\leq\; \mathbb{E}(f_i) * \left(\bigwedge_{y \in X} f_i(y) \to f_j(y) \right).$$

Koska edellisessä päättelyssä kuvausten f_i ja f_j roolit voidaan vaihtaa, ominaisuus (134) seuraa.

Perhe $\mathfrak{F}$ indusoi joukkoon X M-arvoisen yhtäsuuruuden E_0 siten, että

$$\begin{aligned} E_0(x,y) \;=\; & \left(\left(\bigvee_{l \in I} f_l(x) \right) * \left(\bigwedge_{i \in I} (f_i(x) \to f_i(y)) \right) \right) \\ & \wedge \left(\left(\bigvee_{l \in I} f_l(y) \right) * \left(\bigwedge_{i \in I} (f_i(y) \to f_i(x)) \right) \right). \end{aligned}$$

Kuvauksen E_0 strictness ja symmetrisyys (aksioomat (41) ja (42)) ovat ilmeisiä. Todistetaan seuraavaksi sen transitiivisyys eli aksiooman (43) voimassaolo.

$$\begin{aligned} & E_0(x,y) * (E_0(y,y) \to E_0(y,z)) \\ \leq \;& \left(\bigvee_{l \in I} f_l(x) \right) * \left(\bigwedge_{i \in I} f_i(x) \to f_i(y) \right) \\ & * \left(\left(\bigvee_{l \in I} f_l(y) \right) \to \left(\left(\bigvee_{l \in I} f_l(y) \right) * \left(\bigwedge_{i \in I} f_i(y) \to f_i(z) \right) \right) \right) \\ \leq \;& \left(\bigvee_{l \in I} f_l(x) \right) * \left(\bigwedge_{i \in I} f_i(x) \to f_i(y) \right) * \left(\bigwedge_{i \in I} f_i(y) \to f_i(z) \right) \\ \leq \;& \left(\bigvee_{l \in I} f_l(x) \right) * \left(\bigwedge_{i \in I} f_i(x) \to f_j(z) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_0(x,y) * (E_0(y,y) \to E_0(y,z)) \\
\leq\; & \left(\bigvee_{l\in I} f_l(y)\right) * \left(\bigwedge_{i\in I} f_i(y) \to f_i(x)\right) \\
& * \left(\left(\bigvee_{l\in I} f_l(y)\right) \to \left(\left(\bigvee_{l\in I} f_l(z)\right) * \left(\bigwedge_{i\in I} f_i(z) \to f_i(y)\right)\right)\right) \\
\leq\; & \left(\bigvee_{l\in I} f_l(z)\right) * \left(\bigwedge_{i\in I} f_i(z) \to f_i(y)\right) * \left(\bigwedge_{i\in I} f_i(y) \to f_i(x)\right) \\
\leq\; & \left(\bigvee_{l\in I} f_l(z)\right) * \left(\bigwedge_{i\in I} f_i(z) \to f_j(x)\right).
\end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että ominaisuus (134) on voimassa ja näytetään että f_i on singletoni suhteessa M-arvoiseen yhtäsuuruuteen E_0. f_i toteuttaa ehdon (131), sillä

$$\begin{aligned}
& f_i(x) * (E_0(x,x) \to E_0(x,y)) \\
\leq\; & f_i(x) * \left(\left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right) \to \left(\left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right) * \left(\bigwedge_{j\in I} f_j(x) \to f_j(y)\right)\right)\right) \\
\leq\; & f_i(y).
\end{aligned}$$

Ominaisuuden (134) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x)) * f_i(y) * \left(\left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right) \to f_j(x)\right) \\
=\; & (\mathbb{E}(f_i) \to f_i(y)) * f_i(x) * \left(\left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right) \to f_j(x)\right) \\
\leq\; & (\mathbb{E}(f_i) \to f_i(y)) * \mathbb{E}(f_i) * \left(\bigwedge_{z\in X} f_i(z) \to f_j(z)\right) \\
\leq\; & f_j(y).
\end{aligned}$$

Nyt kaikille $j \in I$ pätee

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x)) * f_i(y) &\leq \left(\left(\left(\left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right) \to f_j(x)\right) \to f_j(y)\right) \wedge \left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right)\right) \\
&= \left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right) * (f_j(x) \to f_j(y)).
\end{aligned}$$

Koska operaatio $*$ on distributiivinen suhteessa pienimpään ylärajaan sekä suurimpaan alarajaan, relaatio

$$(\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x)) * f_i(y) \leq \left(\bigvee_{l \in I} f_l(x) \right) * \left(\bigwedge_{j \in I} f_j(x) \to f_j(y) \right)$$

pätee. Koska alkioiden x ja y voidaan vaihtaa, singletoni ehto (132) on todistettu kuvaukselle f_i. $\square$

Relaatiosta (134) voidaan esittää seuraava tulkinta: kuvausten f_i ja f_j samaistumisen aste implikoi näiden kuvausten yhtäsuuruuden asteen. Jokainen L-arvoisten kuvausten perhe $\mathfrak{F}$, jolla on sama määrittelyjoukko ja joka toteuttaa relaation (134), on *sumea partitio.*

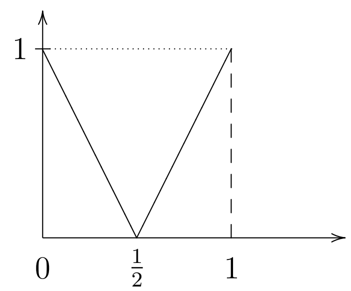
Esimerkki 5.4 (Sumeat partitiot joukossa $[0,1]$) Olkoon GL-monoidina täydellinen MV-algebra $I = ([0,1], \leq, T_m)$, jolloin käytössä ovat Łukasiewiczin logiikan aksioomat.

(a) Olkoon $\mathfrak{F} = \{f_0, f_1\}$ kahden funktion joukko siten, että $f_0 : [0,1] \mapsto [0,1]$, $f_i : [0,1] \mapsto [0,1]$ ja

$$f_0(x) = \max(1 - 2x, 0),$$
$$f_1(x) = \max(2x - 1, 0).$$

Koska $\min(f_0, f_1) = 0$, niin selvästi $\mathfrak{F}$ toteuttaa relaation (134). $\mathfrak{F}$ on siis sumea partitio joukossa $[0,1]$. Vastaava I-arvoinen yhtäsuuruus E_0 määritellään (kuva 3)

$$E_0(x,y) = \begin{cases} \min(1-2x, 1-2y), & x,y \in [0, \frac{1}{2}] \\ \min(2x-1, 2y-1), & x,y \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$



Kuva 3

I-arvoinen eli sumea yhtäsuuruus määrittelee (pseudo)metriikan ρ_E huomautuksen 5.1 mukaisesti. Jos $E_0 = E$ niin ρ_{E_0} vastaa tavallista, euklidista metriikkaa joukossa $[0,1]$. Erikoisesti, E_0 voidaan esittää muodossa

$$E_0(x,y) = d_0(x) + d_0(y) - |x-y| - 1,$$

missä $d_0(z) = \max(1-z, z)$ kaikille $z \in [0,1]$.

(b) Olkoon $\mathbb{D}$ kaikkien reaalivälin $[0,1]$ dynaamisten lukujen joukko. Toisin sanoen $\mathbb{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} \mathbb{D}_n$, missä $\mathbb{D} = \{i \cdot 2^{-n} | i = 0,1,2,\ldots,2^n\}$. Jokaiselle $\alpha \in \mathbb{D}$ määritellään kuvaus $f_\alpha : [0,1] \mapsto [0,1]$ (ks. 4.18(c)) siten, että

$$f_\alpha(x) = 1 - |\alpha - x|.$$

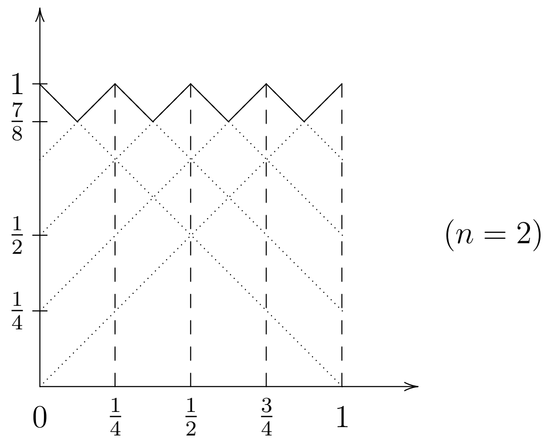
Nyt voidaan tehdä seuraavat havainnot:

- $\bigwedge_{x\in X} (f_\alpha(x) \to f_\beta(x)) \wedge (f_\beta(x) \to f_\alpha(x)) = 1 - |\alpha - \beta|,$
- $f_\alpha(x) = f_\beta(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \dfrac{(\alpha+\beta)}{2},$
- $\max\{f_\alpha(x) | \alpha \in \mathbb{D}\} \geq 1 - 2^{-(n+1)} \qquad \forall x \in [0,1],$
- $\min(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \leq 1 - \dfrac{|\alpha-\beta|}{2} \qquad \forall x \in [0,1].$

Siispä $\mathfrak{F} = \{f_\alpha | \alpha \in \mathbb{D}\}$ toteuttaa relaation (134), joten $\mathfrak{F}$ on sumea partitio joukossa $[0,1]$. Vastaava I-arvoinen yhtäsuuruus E_0 määritellään (kuva 4)

$$E_0(x,y) = 1 - |x-y|.$$

Jälleen metriikka ρ_{E_0} vastaa tavallista euklidista metriikkaa joukossa $[0,1]$.



Kuva 4

Edellisessä esimerkissä (a) kuvaa *lokaalia olemassaoloa.* Funktio d_0 määrää lokaalin rakenteen ja sen kuvaajasta nähdään, että systeemin voidaan ajatella liukuvan tilojen 0 ja 1 välillä. Tämä tilanne vaatii paikallisen, tunnistamattomuuden ja eriytymisen välisen tilan, mikä esiintyy hämärien kappaleiden ajatuksessa. Vastaavasti edellisessä esimerkissä (b) kuvaa *globaalia olemassaoloa.* Siinä kuvataan reaalista yksikköväliä numeroituvilla, sumeilla partitioilla. Intuitiivisesti tämä partitio voidaan ajatella joukon $[0, 1]$ eräänlaisena diskretisointina.

Seuraavaksi esitetään ratkaisu sumeaan säätöongelmaan.

1. Sumea systeemi S, jonka syöteavaruus on X sekä tulosteavaruus on Y, on annettu.

2. Valitaan systeemin S dynamiikasta riippuen sopivat, joukkojen X ja Y sumeat partitiot. Tosin sanoen valitaan kuvausten $f_i : X \mapsto L$ ja $g_i : Y \mapsto L$ luokka siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

   (135) $\mathbb{E}(f_i) = \mathbb{E}(g_i)$ eli kuvausten f_i ja g_i korkeudet ovat samat kaikille $i \in I$,

   (136) $\{f_i | i \in I\}$ ja $\{g_i | i \in I\}$ toteuttavat relaation (134).

3. Valitaan M-arvoiset yhtäsuuruudet E joukossa X ja F joukossa Y siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa kaikille x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 ja kaikille $l, i \in I$:

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x_1)) * f_i(x_2) &\leq E(x_1, x_2) \\
&\leq \left(\bigvee_{l \in I} f_l(x_1) \right) * (f_i(x_1) \to f_i(x_2)), \\
(\mathbb{E}(g_i) \to g_i(y_1)) * g_i(y_2) &\leq F(y_1, y_2) \\
&\leq \left(\bigvee_{l \in I} g_l(y_1) \right) * (g_i(y_1) \to g_i(y_2)), \\
E(x, x) &= \bigvee_{l \in I} f_l(x), \\
F(y, y) &= \bigvee_{l \in I} g_l(y).
\end{aligned}
$$

   M-arvoisten yhtäsuuruuksien E ja F olemassaolo on seurausta ehdosta (136) sekä teoreemasta 5.3.

4. Määritellään kuvaus $\phi : X \mapsto Y$ siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

$$E(x,x) = F(\phi(x),\phi(x)), \qquad E(x_1,x_2) \leq F(\phi(x_1),\phi(x_2)), \tag{137}$$

$$\bigvee_{x\in X} f_i(x) * (E(x,x) \to F(\phi(x),y)) = g_i(y) \tag{138}$$
$$\forall y \in Y, \ \ \forall i \in I.$$

Askel 3. ratkaisee sumentamisongelman. M-arvoisten yhtäsuuruuksien olemassaolon perusteella voidaan jokainen arvo $x_0 \in X$ ja $y_0 \in Y$ määrätä singletonin (määritelmä 5.2) avulla:

$$\tilde{x}_0(x) = E(x_0,x), \qquad x \in X,$$
$$\tilde{y}_0(y) = F(y_0,y), \qquad y \in Y.$$

Askel 4. ratkaisee täsmentämisongelman. Erikoisesti, kuvaus, joka täyttää ehdot (137) ja (138), on *sumeiden partitioiden* $\{f_i|i \in I\}$ ja $\{g_i|i \in I\}$ niin sanottu *säätökuvaus.* Ehto (137) merkitsee, että ϕ on M-SET- morfismi. Ehto (138) takaa, että singletoni f_i kuvataan sigletoniksi g_i.

Lause 5.5 (Säätökuvauksen ominaisuuksia) *Olkoon I ei-tyhjä indeksijoukko, $\mathfrak{F} = \{f_i|i \in I\}$ sumea partitio joukossa X ja $\mathfrak{G} = \{g_i|i \in I\}$ sumea partitio joukossa Y. Olkoon lisäksi $\phi : X \mapsto Y$ partitioiden $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{G}$ säätökuvaus ja*

$$R(x,y) = \bigvee_{i\in I} (f_i(x) \wedge g_i(y)).$$

Silloin seuraavat relaatiot ovat voimassa:

$$F(\phi(x),y) \leq R(x,y), \tag{139}$$

$$\bigvee_{i\in I} (\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x)) * g_i(y) \leq F(\phi(x),y). \tag{140}$$

Todistus. Koska ehto (137) takaa, että ϕ on strict ja koska (138) on voimassa, seuraavat relaatiot pätevät askeleen 3 perusteella:

$$F(\phi(x),y) \leq \left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right) * \left(\bigwedge_{i\in I} g_i(\phi(x)) \to g_i(y)\right),$$
$$f_i(x) = f_i(x) * (E(x,x) \to F(\phi(x),\phi(x))) \leq g_i(\phi(x)).$$

Nyt

$$\begin{aligned} F(\phi(x),y) &\leq \left(\bigvee_{l\in I} f_l(x)\right) * \left(\bigwedge_{i\in I} f_i(x) \to g_i(y)\right), \\ &\leq \bigvee_{l\in I} (f_l(x) \wedge g_l(y)) = R(x,y), \end{aligned}$$

joten relaatio (139) on voimassa.

Ehtoja (137) ja (138) soveltamalla saadaan jälleen askeleen 3 perusteella seuraavat relaatiot:

$$\begin{aligned}
& (\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x_0)) * g_i(y) \\
= & \bigvee_{x\in X} ((\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x_0)) * f_i(x) * (E(x,x) \to F(\phi(x),y))) \\
\le & \bigvee_{x\in X} (E(x_0,x) * (E(x,x) \to F(\phi(x),y))) \\
\le & \bigvee_{x\in X} (F(\phi(x_0),\phi(x)) * (F(\phi(x),\phi(x)) \to F(\phi(x),y))) \\
\le & F(\phi(x_0,y)).
\end{aligned}$$

Niinpä relaatio (140) on voimassa. □

Korollaari 5.6 (Säätöfunktioiden sumeat kuvaajat) *Olkoon lauseen 5.5 notaatiot voimassa. Olkoon lisäksi $M = (L, \le, *)$ GL-monoidi, jossa on määritelty neliöjuuri.*

Jokainen säätöfunktio ϕ toteuttaa epäyhtälön

$$(141) \qquad R(x,y) \le (F(\phi(x),y))^{1/2} \qquad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Jos GL-monoidin M määrittelee täydellinen Heyting algebra (eli $* = \wedge$), niin jokainen säätöfunktio ϕ toteuttaa ehdon

$$(142) \qquad R(x,y) = F(\phi(x),y) \qquad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Erikoisesti, annettu sumea relaatio R on funktion ϕ sumea kuvaaja.

Todistus. Koska GL-monoidissa M on määritelty neliöjuurilauseen relaation (139) perusteella saadaan seuraavat epäyhtälöt:

$$\begin{aligned}
R(x,y) & \le \bigvee_{i\in I} (f_i(x))^{1/2} * (g_i(y))^{1/2} \\
& \le \bigvee_{o\in I} (\mathbb{E}(f_i) \to f_i(x))^{1/2} * (g_i(y))^{1/2} \\
& \le (F(\phi(x),y))^{1/2}.
\end{aligned}$$

Niinpä (141) on voimassa.

Koska $*$ on idempotentti (siis $* = \wedge$), (142) seuraa välittömästi epäyhtälöstä (141) sekä relaatiosta (139). □

Relaatio (142) osoittaa, että intuitiivisen logiikan tapauksessa sumean säätöongelman aksiomatisointi johtaa siihen, että sumea relaatio R, joka kuvaa annetun systeemin S dynaamista käyttäytymistä, on itse asiassa vastaavien säätöfunktioiden kuvaaja. Lisäksi, jos M-arvoinen yhtäsuuruus F maalijoukossa Y on *erillinen*, niin R määrittelee yksikäsitteisesti säätöfunktion ϕ.

Łukasiewiczin logiikan tapauksessa (eli kun kyseessä on kanoninen MV-algebra $([0,1], \leq, T_m)$) reaalivälillä $[0,1]$ sumean säätöongelman aksiomatisointi ei johda yhtä siistiin tulokseen kuin intuitiivisessa tapauksessa. Łukasiewiczin logiikassa aritmeettisen konjunktion T_m epäidempotenttisyyden takia päädytään estimaattiin muotoa

$$0 \leq R(x,y) - F(\phi(x),y) \leq \frac{1 - F(\phi(x),y)}{2},$$

joka on tyydyttävä, kun $F(\phi(x),y)$ on riittävän lähellä arvoa 1.

Monoidin $M = ([0,1], \leq, T_m)$ tapauksessa yhtäsuuruuden säilymisen morfismi ominaisuus (45) tarkoittaa, että pieni muutos syöteavaruudessa aiheuttaa pienen muutoksen tulosteavaruuteen. Niinpä (45) on myös stabiilisuusehto, joka on tarpeellinen säätöfunktioiden soveltamisessa.

Mikäli M-arvoinen yhtäsuuruus täyttää ehdon (128) sijaan vahvemman ehdon

$$(128^*) \qquad E(x,x) = 1 \qquad \forall x \in X,$$

niin se on niin sanottu *globaali* M-arvoinen yhtäsuuruus.

Oleellista tämän luvun esityksessä on ollut formuloida M-arvoiset pisteet, singletonit, globaalit ja lokaalit sumeat pisteet sekä näiden lokaali olemassaolo. Näiden avulla sumean säätöteorian ongelma voidaan ilmaista eksaktisti matemaattisesti, eikä pelkästään intuitiivisesti.

Luku 6

Yhteenveto

Sumean logiikan juuret ulottuvat 1960-luvulle L. A. Zadehin työhön. Ulrich Höhle on omalla työllään antanut osansa sumeuden matemaattisen teorian perusteille. Höhle esittää teoreetikkona sumealle logiikalle eksakstin matemaattisen pohjan. Tässä diplomityössä on tutustuttu sumean logiikan matemaattiseen semantiikkaan erityisesti Höhlen tulkinnan mukaisesti. Ensisijaisena lähteenä diplomityössä on Höhlen artikkeli *On the Fundamentals of Fuzzy set theory.*

Sumean logiikan perusrakenteisiin ja niiden tärkeimpiin ominaisuuksiin perehdyttiin luvussa 2. Lattiiseille eli osittain järjestetyille joukoille binääriset relaatiot ja niiden ominaisuudet ovat merkittävässä asemassa. Relaatioiden refleksiivisyyden, transitiivisyyden tai symmetrisyyden tärkeys ilmenee erityisesti sumeassa säätöteoriassa. Residuoidut lattiisit eli kommutatiiviset, residuoidut l-monoidit, MV-algebrat sekä niiden perusominaisuudet ovat oleellisia sturktuureja, joiden avulla sumean logiikan matematiikka voidaan esittää eksaktisti. Luvussa 2 tehtiin lisäksi katsaus monoidikimppuihin sumeiden sekä joukkojen kategorioihin.

Luvussa 3 klassinen todennäköisyysteoria laajennettiin uskottavuusteoriaksi. Uskottavuusteoriassa pyritään mittaaman ympäristön epävarmuutta. Tutkittava ympäristö koostuu tapahtumista sekä tapahtumien realisaatioista ja todennäköisyykstä. Perusrakenteena uskottavuusteoriassa on lattiisi, jonka alkioita tapahtumat ovat. Epävarmuus liittää jokaisen tapahtuman reaalilukuun yksikkövälillä $[0, 1]$. Uskottavuusteoriassa De Morganin lait ovat voimassa ja realisaatiot, uskottavuusmitat ja todennäköisyysmitat kuvaavat tapahtuman todennäköisyyttä kompleksisemmin kuin mihin todennäköisyysteoria totuusarvojoukolla $\{0, 1\}$ kykenee.

Siinä missä uskottavuusteoria on todennäköisyysteorian yleistys, monoidinen logiikka on perinteisen logiikan yleistys. Luvussa 4 perehdyttiin monoidisen lauseloogikan aksioomiin ja kuinka kommutatiiviset, residuoidut l-monoidit käyttäytyvät näiden aksioomien puitteissa. Monoidisen lauselogiikan lisäksi määriteltiin formaalinen kieli ja edelleen monoidinen predikaattilogiikka. Yhteisesti näistä koostuu epäklassinen malliteoria, jonka kautta päästiin käsiksi loogisten järjestelmien soundness- ja täydellisyyslauseisiin. Monoidisen lauselogiikan perustana määriteltiin myös identiteetti sekä partikkelien paikallinen olemassaolo.

Höhle on nähnyt ongelmallisena useissa kirjallisuuslähteissä sumean säätöteorian johdonmukaisen matemaattisen semantiikan puuttumisen. Usein säätöongelmien ratkaisu perustuu lähinnä intuitioon eikä matematiikkaan. Viidennessä luvussa rakennettiin sumen säätöteorian matemaattinen pohja lähtien Poincarén paradoksista.

Liitteessä esitetty tiivis katsaus kategoriateoriaan takaa peruskäsitteistön ja -ymmärryksen sumean logiikan ja sumeiden relaatioiden tarkastelun kategorioiden avulla, jotka olivat oleellisessa osassa diplomityössä sumeuden matemaattisen semantiikan rakentamisessa.

Kokonaisuutena tämän diplomityön merkitys on sumean logiikan matemaattisessa tulkinnassa. Tarkoituksena oli rakentaa puhtaasti matemaattinen esitys uskottavuusteoriasta, epäklassisesta malliteoriasta sekä sumeasta säätöteoriasta. Intuitiivisesti sumeat joukot kuten kauneus, omenan väri tai ilman kylmyys sekä sumeat säätöongelmat voivat olla helpostikkin käsiteltävissä. Kuitenkin niiden johdonmukainen ja yksityiskohtainen kuvaaminen matemaattisesti on haaste. Säätöteorian alainen sumea systeemi on todellinen reaalimaailman ympäristö, johon matematiikka voi tarjota käyttökelpoisen työkalun. Tämä diplomityö yrittää vastata tähän haasteeseen sen kontribuution avulla, jonka Ulrich Höhle on tarjonnut sumean logiikan matematiikalle.

Kirjallisuutta

[1] Barr M. & Welles C., *Category theory for computing science*, Prentice Hall International, Hertfordshire (1990)

[2] Höhle U.& Klement E. P., *Non-classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht (1995)

[3] Höhle U., *On the Fundamentals of Fuzzy set theory*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 201 (1996), 786-826

[4] Höhle U., *Commutative, residuated l-monoids* teoksessa *Non-classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets* (toim. Höhle U., Klement E. P.) Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht (1995), 53-106

[5] Höhle U., *Presheaves over GL-monoids* teoksessa *Non-classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets* (toim. Höhle U., Klement E. P.) Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht (1995), 127-157

[6] Krishnan V. S., *An Introduction to Category Theory*, Elsevier North Holland, New York (1981)

[7] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York (1971)

[8] Mamdani E. H. & Gaines B. R., *Fuzzy reasoning and its applications*, Academic Press, London (1981)

[9] Novák V., Perfilieva I. & Močkoř J., *Mathematical principles of fuzzy logic*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht (1999)

[10] Pedicchio M. C. & Tholen W., *Categorical foundations: special topics in order, topology, and Sheaf theory*, Cambridge University Press, Cambridge (2004)

[11] Turunen E., *Mathematics Behind Fuzzy Logic*, Physica-Verlag, Heidelberg (1999)

[12] Zadeh L. A., *Fuzzy Sets*, Information and Control 8 (1965), 338-353

[13] http://mathworld.wolfram.com/TychonoffTheorem.html (Viitattu 11.5.2005)

[14] http://www.uwasa.fi/ mamo/AL2L1.pdf (Viitattu 17.5.2005)

Liite A

Kategoriateoriaa

Kategoriateoria on sumean logiikan olennainen työkalu, joka kuitenkin muodostaa täysin itsenäisen kokonaisuuden aksioomineen ja ominaisuuksineen. Kategoriat tarjoavat kätevän käsitteellisen kielen matematiikkaan. Kategoriaa itseään voi ajatella tietynlaisena yleistettynä monoidina. Yksinkertaistettuna kategoriat voidaan ajatella nuolien (funktioiden, kuvausten) ja objektien (joukkojen tai muiden rakenteellisten systeemien) muodostamaksi systeemiksi. Tässä kategoriateoriaan tutustutaan yleisluontoisesti, eikä keskitytä niinkään sen käyttöön sumean logiikan yhteydessä. Sumeiden joukkojen kategorioihin perehdytään esimerkiksi teoksissa [2] ja [10]. Esitettyjä väitteitä ei todisteta tässä yhteydessä, mutta tarvittaessa todistukset löytyvät lähdekirjallisuudesta [1], [6] sekä [7].

Kategoriateoria lähtee liikkeelle havainnosta, että useiden matemaattisten systeemien ominaisuudet voidaan yhtenäisesti esittää *nuolien* avulla diagrammeina, jossa jokainen nuoli kuvaa funktiota. Tarkastellaan aluksi funktioita $f : A \mapsto B$ ja $g : B \mapsto C$. Silloin on olemassa yhdistetty funktio $g \circ f : A \mapsto C$. Diagrammi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

on kommutatiivinen jos ja vain jos $h = g \circ f$.

Jokaisella joukolla A on olemassa sellainen identiteettifunktio $1_A : A \mapsto A$, että $1_A(a) = a$. Identiteettifunktiot ovat operaation $\circ$ suhteen yksikköalkioita. Toisin sanoen $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$ kaikille $f : A \mapsto B$.

Määritelmä A.1 Kategoria *koostuu* objekteista $A, B, C, \ldots$ *ja* nuolista $f, g, h, \ldots$ *jotka täyttävät seuraavat ehdot:*

- *Jokaiselle nuolelle f on olemassa objektit* dom(f), cod(f) *(domain ja codomain), jota merkitään $f : A \mapsto B$, missä $A =$*dom(f) *ja $B =$*cod(f).
- *Nuolille $f : A \mapsto B$ ja $g : B \mapsto C$ on olemassa nuoli $g \circ f : A \mapsto C$.*
- *Jokaiselle objektille A on olemassa* identiteettinuoli $1_A : A \mapsto A$.
- *Kaikille nuolille $f : A \mapsto B$, $g : B \mapsto C$, $h : C \mapsto D$ pätee*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \qquad \text{(assosiatiivisuus)}$$

- *Jokaiselle $f : A \mapsto B$ pätee*

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f.$$

Kategoria on mikä tahansa systeemi, joka täyttää edellisen määritelmän. Esimerkiksi kategoria **SET** koostuu joukoista ja funktioista. Kategoria **POS** koostuu puolestaan lattiiseista ja niiden välisistä monotonisista funktioista. Kategorian sanotaan olevan *pieni*, mikäli sen nuolet ja objektit ovat joukkoja. Muutoin kategoria on *suuri*. Jos A ja B ovat kategorian $\mathbf{C}$ objekteja, niin kaikkien kuvausten $f_i : A \mapsto B$ joukkoa merkitään $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$.

Kahden kategorian $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{D}$ *tulo* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ on uusi kategoria, jonka objektit ovat muotoa (C, D), missä $C \in \mathbf{C}$ ja $D \in \mathbf{D}$. Kategorian nuolet ovat vastaavasti muotoa $(f, g) : (C, D) \mapsto (C', D')$ siten, että $f : C \mapsto C' \in \mathbf{C}$ ja $g : D \mapsto D' \in \mathbf{D}$. Lisäksi yhdistetty nuoli ja yksikkö määritellään komponenteittain:

$$\begin{aligned} (f', g') \circ (f, g) &= (f' \circ f, g' \circ g), \\ 1_{(C,D)} &= (1_C, 1_D). \end{aligned}$$

Määritelmä A.2 *Kategorian $\boldsymbol{C}$* alikategoria *$\boldsymbol{D}$ on sellainen kategoria, että*

- *kaikkia kategorian $\boldsymbol{D}$ objektit ja nuolet ovat kategorian $\boldsymbol{C}$ objekteja ja nuolia,*
- *kaikille kategorian $\boldsymbol{D}$ objekteille A ja B pätee*

$$Hom_{\boldsymbol{D}}(A, B) \subseteq Hom_{\boldsymbol{C}}(A, B),$$

- *kategorian* $\boldsymbol{D}$ *objektin* A *identiteettinuoli* 1_A *on myös identiteettinuoli kategoriassa* $\boldsymbol{C}$*,*
- *jos* $f : A \mapsto B$ *ja* $g : B \mapsto C$ *ovat nuolia kategoriassa* $\boldsymbol{D}$*, niin* $g \circ f$ *on nuoli kategoriassa* $\boldsymbol{C}$ *ja* $\boldsymbol{D}$*.*

Määritelmä A.3 Funktori *on kategorian* $\boldsymbol{C}$ *ja* $\boldsymbol{D}$ *välinen kuvaus* $F : \boldsymbol{C} \mapsto \boldsymbol{D}$*, joka kuvaa objektit objekteiksi ja nuolet nuoliksi siten, että*

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & F(f : A \mapsto B) = F(f) : F(A) \mapsto F(B), \\ \text{(b)} & F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \\ \text{(c)} & F(1_A) = 1_{F(A)}. \end{array}$$

Funktori on siis kategorioiden välinen homomorfismi. Kategorian **MON** objektit ovat monoideja ja nuolet monoidirakenteen säilyttäviä kuvauksia. Homomorfismi monoidista M monoidiin N on funktio $h : M \mapsto N$, jolle $h(m \cdot_M n) = h(m) \cdot_N h(n)$, $h(u_M) = u_N$ pätee kaikilla $m, n \in M$. Monoidi homomorfismi monoidista M monoidiin N on sama kuin funktori kategoriasta M kategoriaan N. Tässä mielessä kategoriat voidaan ajatella yleistettyinä monoideina ja funktorit yleistettyinä homomorfismeina.

Määritelmä A.4 *Kategorian* $\boldsymbol{C}$ *nuoli* $f : A \mapsto B$ *on* isomorfismi*, jos kategoriassa* $\boldsymbol{C}$ *on olemassa sellainen nuoli* $g : B \mapsto A$*, että*

$$g \circ f = 1_A, \qquad f \circ g = 1_B.$$

Tällöin A *ja* B *ovat isomorfisia, mitä merkitään* $A \cong B$*.*

Monoidia, jonka alkio on isomorfismi vastaavassa kategoriassa, kutsutaan invertoituvaksi. Koska inverssi on yksikäsitteinen, merkitään $g = f^{-1}$. Monoidi, jossa on määritelty inverssi, on *ryhmä*.

Kategoriassa **SET** funktio $f : A \mapsto B$ on *injektiivinen*, jos $f(a) = f_{a'}$ implikoi $a = a'$ kaikilla $a, a' \in A$. Vastaavasti f on *surjektiivinen*, jos kaikille $b \in B$ on olemassa $a \in A$ siten, että $f(a) = b$.

Määritelmä A.5 *Kategorian* $\boldsymbol{C}$ *nuoli* $f : A \mapsto B$ *on* monomorfismi *(eli mono tai monic), jos kaikille* $g, h : C \mapsto A$ *relaatio* $fg = fh$ *implikoi* $g = h$*.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Vastaavasti $f : A \mapsto B$ *on* epimorfismi *(eli epi tai epic), jos kaikille* $i, j : B \mapsto C$ *relaatio* $if = jf$ *implikoi* $i = j$*.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & D \end{tikzcd}$$

Monomorfismia voidaan merkitä $f : A \rightarrowtail B$ ja epimorfismia $f : A \twoheadrightarrow B$. Funktio $f : A \mapsto B$ on monic jos ja vain jos se on injektiivinen. Lisäksi jokainen isomorfismi on sekä mono- että epimorfismi.

Määritelmä A.6 *Kategorian $\boldsymbol{C}$ objekti* 0 *on* alkuobjekti *(initial object), jos kaikille kategorian $\boldsymbol{C}$ objekteille A on olemassa yksikäsitteinen nuoli $0 \mapsto A$. Kategorian $\boldsymbol{C}$ objekti* 1 *on* terminaaliobjekti*, jos kaikille kategorian $\boldsymbol{C}$ objekteille A on olemassa yksikäsitteinen nuoli $A \mapsto 1$.*

Jos $f : A \mapsto B$ on kategorian nuoli ja jotakin nuolta $g : C \mapsto B$ kohti on olemassa nuoli $h : A \mapsto C$, jolle pätee $f = g \circ h$, niin nuolen g sanotaan olevan nuolen f *faktori*.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \\
 & C \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Olkoon $f_0 : C_0 \rightarrowtail C$ ja $f_1 : C_1 \rightarrowtail C$ monomorfismeja kategoriassa. Jos nuolet ovat toistensa faktoreita, sitä merkitään $f_0 \sim f_1$. Silloin $f_0 = f_1 \circ g_1$ ja $f_1 = f_0 \circ g_0$

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr, shift left, "g_1"] & C \\
 & C_1 \arrow[u, "f_i"'] \arrow[ul, shift left, "g_0"]
\end{tikzcd}$$

Olkoon $f_0 \sim f_1$. Faktorit f_0 ja f_1 ovat yksikäsitteisiä ja inverssi isomorfismeja. Lisäksi $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

Määritelmä A.7 *Kategorian $\boldsymbol{C}$ objektin A* aliobjekti *on monomorfismien ekvivalenssiluokka relaation $\sim$ suhteen.*

Aliobjektin käsite yleistää osajoukon käsitteen.

Määritelmä A.8 *Olkoon $F, U : \boldsymbol{C} \mapsto \boldsymbol{D}$ funktoreita.* Luonnollinen muunnos *$\eta : F \mapsto U$ on funktio, joka liittää jokaisen kategorian $\boldsymbol{C}$ objektin A kategorian $\boldsymbol{D}$ nuoleen $\eta_A = \eta A : FA \mapsto UA$ siten, että jokainen kategorian $\boldsymbol{C}$ nuoli $f : A \mapsto A'$ muodostaa kommutatiivisen diagrammin.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] & FA \arrow[r, "\eta A"] \arrow[d, "Ff"'] & UA \arrow[d, "Uf"] \\
A' & FA' \arrow[r, "\eta A'"'] & UA'
\end{tikzcd}
$$

Luonnollinen muunnos on funktoreiden morfismi. Annetuille kategorioille **C** ja **D** voidaan funktorit $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{D}$ ajatella uuden kategorian objekteina. Näiden objektien välisiä nuolia kutsutaan luonnollisiksi muunnoksiksi.

Määritelmä A.9 *Olkoon $\boldsymbol{C}$ ja $\boldsymbol{D}$ kategorioita. Olkoon $F : \boldsymbol{C} \mapsto \boldsymbol{D}$ ja $U : \boldsymbol{D} \mapsto \boldsymbol{C}$ funktoreita. Jos on olemassa luonnollinen muunnos $\eta : 1_C \mapsto U \circ F$ siten, että kaikille $C \in \boldsymbol{C}, D \in \boldsymbol{D}$ ja $f : C \mapsto U(D)$ on olemassa sellainen yksikäsitteinen nuoli $g : FC \mapsto D$, että $f = U(g) \circ \eta_C$. Silloin F on funktorin U* vasen liitos *(adjoint) ja U on funktorin F* oikea liitos*, mitä merkitään $F \dashv U$.*

$$
F(C) \xrightarrow{g} D
$$

$$
\begin{tikzcd}
U(F(C)) \arrow[r, "U(g)"] & U(D) \\
C \arrow[u, "\eta_C"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Edellisesesä määritelmässä luonnollinen muunnos η on liitoksen niin sanottu yksikkö. Sen edellä esitetty ominaisuus on niin sanottu *universaali kuvausominaisuus* (universal mapping property eli UMP).

Määritelmä A.10 Monadi *(eli triple) $T = (T, \eta, \mu)$ kategoriassa $\boldsymbol{C}$ koostuu sellaisesta funktorista $T : \boldsymbol{C} \mapsto \boldsymbol{C}$ sekä sellaisista luonnollisista muunnoksista $\eta : 1_C \mapsto T$ ja $\mu : T^2 \mapsto T$, että diagrammit*

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
& T &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
$$

kommutoivat. $\eta T : 1_C \circ T \mapsto T \circ T$ määritellään yhtälöllä $(\eta T)C = \eta(TC)$ ja $T\eta : T \circ 1_C \mapsto T \circ T$ yhtälöllä $(T\eta)C = T(\eta C)$, missä $C \in \boldsymbol{C}$.

Edellä merkintä $T^2 = T \circ T$ ja $T^3 = T^2 \circ T$. Jokainen monadi voidaan määritellä tietyn liitoksen avulla.

Olkoon $T = (T, \eta, \mu)$ monadi. Kategoriassa $\mathbf{C}^T$ objekteina ovat ns. T-algebrat, jotka ovat muotoa $\alpha : TA \mapsto A$ olevia pareja (A, α) kategoriassa $\mathbf{C}$ siten, että $1_A = \alpha \circ \eta_A$ ja $\alpha \circ \mu_A = \alpha \circ T\alpha$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "1"'] & TA \arrow[d, "\alpha"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "T\alpha"] \arrow[d, "\mu_A"'] & TA \arrow[d, "\alpha"] \\ TA \arrow[r, "\alpha"'] & A \end{tikzcd}$$

T-algebrojen morfismi $h : (A, \alpha) \mapsto (B, \beta)$ on sellainen nuoli $h : A \mapsto B$ kategoriassa $\mathbf{C}$, että $h \circ \alpha = \beta \circ T(h)$.

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\alpha"'] & TB \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Olkoon annettuna liitos $F \dashv U$. Kategorialle $\mathbf{C}^T$, missä $T = U \circ F$, voidaan määritellä sellainen funktori $\Phi : \mathbf{D} \mapsto \mathbf{C}^T$, että

$$\begin{aligned} U^T \circ \Phi &\cong U, \\ \Phi \circ F &= F^T. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, shift left, "U"] & & \mathbf{C}^T \arrow[dl, shift left, "U^T"] \\ & \mathbf{C} \arrow[ul, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "F^T"] & \end{tikzcd}$$

Funktori Φ on yksikäsitteinen. Mikäli funktorilla $U : \mathbf{D} \mapsto \mathbf{C}$ on vasen liitos $F \dashv U$ siten, että Φ on kategorioiden ekvivalenssi

$$\mathbf{D} \xrightarrow[\cong]{\Phi} \mathbf{C}^T \, ,$$

missä $T = UF$, niin funktorin U sanotaan olevan *monadinen*.

Määritelmä A.11 (Pullback) *Kategoriassa **C** nuolien f ja g, joille cod(f) =cod(g)*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

pullback *koostuu nuolista p_1 ja p_2, joille dom(p_1) = dom(p_2)*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

siten, että $fp_1 = gp_2$. Lisäksi kaikille nuolille $z_1 : Z \mapsto A$ ja $z_2 : Z \mapsto B$, joille $fz_1 = gz_2$ on olemssa yksikäsitteinen nuoli $u : Z \mapsto P$ siten, että $z_1 = p_1u$ ja $z_2 = p_2u$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Kommutatiivinen diagrammi

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

on siten niin sanottu pullback neliö.