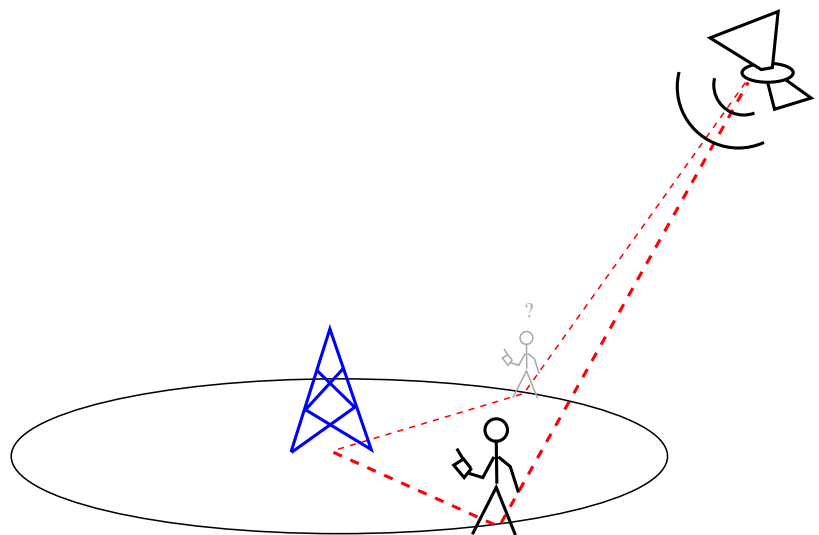


MAT-45800 Paikannuksen matematiikka

Simo Ali-Löytty
Jussi Collin
Niilo Sirola
2010



Esipuhe

Paikannustekniikoita ja niihin liittyviä algoritmeja on tutkittu Tampereen teknillisellä yliopistolla usean laitoksen ja tutkimusryhmän voimin jo vuosikymmenen ajan. Tähän kurssin *MAT-45800 Paikannuksen matematiikka* monisteeseen on kerätty paikannuksessa tarvittavia algoritmeja ja matemaattisia työkaluja esimerkkien kera. Eri tekniikoiden ja laitteistojen yksityiskohtiin ei mennä, vaan kurssin jälkeen opiskelijan pitäisi pystyä ratkomaan sovelluskohtaisia ongelmia tarvitsematta montaakaan kertaa keksiä pyörää uudelleen.

Tämä moniste ja kurssi antavat vahvan pohjan kurssille *TKT-2540 Paikannuksen menetelmät*, jonka kanssa aikaisempina vuosina on ollut yhteinen moniste. Käytännön syiden vuoksi aikaisempi moniste on nyt jaettu kahteen osaan siten, että molemmilla kursseilla on oma moniste. Silti ko. kurssit liittyvät tiiviisti toisiinsa ja on erittäin suositeltavaa suorittaa molemmat kurssit samana lukuvuonna.

Esitietoina tälle kurssille oletetaan Insinöörimatematiikan tai Laajan matematiikan kokonaisuus sekä perustiedot todennäköisyyslaskennasta. Lisäksi kurssi *TKT-2530 Satelliittipaikannuksen perusteet* on hyödyllinen, muttei suinkaan pakollinen esitieto. ”Virallista” kurssikirjaa ei tämän monisteen lisäksi ole. Kurssi on hyvin tiivis suhteessa asiasisältöön, ja käsittelemiämme asioita sivutaan lukuisissa lähteissä, joista olemme pyrkineet viittaamaan lähinnä verkosta tai TTY:n kirjastosta löytyviin teoksiin. Käytännön paikannuslaskuissa tarvittava menetelmäpankki on koottu eri matematiikan ja insinööritieteiden aloilta. Niiden välillä on usein koulukunta- ja tulkintaeroja, joten olemme parhaamme mukaan koettaneet käyttää yhtenäisehköjä merkintöjä ja esittää yhteyksiä eri ajattelutapojen välillä.

Kurssin kotisivuille <http://math.tut.fi/courses/MAT-45800/> tulee (toivottavasti erittäin lyhyt) lista monisteesta löytyneistä virheistä.

Kiitokset prof. Robert Pichéille, Helena Leppäkoskelle, Henri Pesoselle, Hanna Sairolle, Martti Kirkko-Jaakkolalle ja muille tähän tai edellisiin versioihin myötävaikuttaneille. Luvut, joita ei vuoden 2010 toteutuskerralla käsitellä, on merkitty tähdellä (*).

Tampereella 8. joulukuuta 2009,

tekijät

Sisältö

1 Taustaa	4
1.1 Matriisilaskentaa	4
1.2 Ylimäärätty lineaarinen yhtälöryhmä	6
1.3 Todennäköisyyslaskenta	7
1.4 Koordinaatistot*	14
1.5 Liikkuvat koordinaatistot *	17
2 Staattinen paikkaratkaisu	22
2.1 Mittausyhtälöt	22
2.2 Suljetun muodon ratkaisut	24
2.3 Iteratiivinen pienin neliösumma	25
2.4 Uskottavuuden maksimointi	30
2.5 Bayesilainen ratkaisu	31
2.6 Luottamusvälit	34
3 Suodatus	39
3.1 Vakionopeusmalli	41
3.2 Kalmanin suodatin	42
3.3 Epälineaariset Kalmanin suodattimet	45
3.4 Bayesilainen suodatin	48
3.5 Suodatuksen numeerisia menetelmiä	50
Hakemisto	59
Kirjallisuutta	62

Luku 1

Taustaa

SIMO ALI-LÖYTTY

Matemaattisesti katsottuna paikannuksessa on tarkoitus ratkaista tilan $x \in \mathbb{R}^n$ ”paras”^{*} estimaattori yhtälön

$$y = f(x) + \varepsilon, \quad (1.1)$$

perusteella. Tässä y sisältää mittaukset ja ε :a kutsutaan virheeksi (tuntematon). Eräs hyvin tärkeä yhtälön (1.1) erikoistapaus saadaan kun funktio f on lineaarinen, tätä erikoistapusta käsitellään kappaleessa 1.2. Usein virhetermi ε ja mahdollisesti myös tila x mallinnetaan satunnaismuuttujiksi, tämän vuoksi käsittelemme todennäköisyyslaskentaa kappaleessa 1.3. Luvun lopussa käsitellään koordinaatistoja 1.4 ja liikkuvia koordinaatistoja 1.5, jotka kuuluvat luonnollisena osana paikannukseen. Ennen varsinaista asiaa muistutamme mieleen hieman matriisilaskentaa kappaleessa 1.1.

1.1 Matriisilaskentaa

Käsittelemmä tässä kappaleessa paikannuksessa tarvittavaa matriisilaskentaa. Aluksi hieman kertausta ja merkintöjen esittelyä listan muodossa. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reaalmatriisi. Tällöin

- matriisin A nolla-avaruus $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.
- matriisin A pystyriaviaruus $\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax; x \in \mathbb{R}^n\}$.
- $\dim(\mathcal{R}(A^T)) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \text{rank}(A)$.

^{*}Ei ole ollenkaan itsestään selvää mitä tarkoittaa sana ”paras”. Mallinnuksen eräs tarkoitus on määrittää kriteeri, jolla vertaillaan paremmuutta. Usein tämä kriteeri on nk. kustannusfunktio, joka on esimerkiksi muotoa $\|y - f(\hat{x})\|^2$ tai $E(\|x - \hat{x}\|^2)$.

- $\dim(\mathcal{N}(A)) + \text{rank}(A) = n$ (Dimensiolause).
- A on symmetrinen jos $A^T = A$.
- A on ortogonaalinen jos $A^T A = I$, tällöin matriisin A pystyrivejä kutsutaan ortonormaaliksi.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on idempotentti jos $AA = A$.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $Ax = \lambda x$, missä $x \neq 0$. Tällöin λ on matriisin A ominaisarvo ja x on siihen liittyvä ominaisvektori.

Esimerkki 1. *Olkoon A idempotentti ja λ matriisin A mielivaltainen ominaisarvo ja x sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin*

$$\lambda x = Ax = AAx = \lambda^2 x \implies \lambda = 1 \text{ tai } \lambda = 0,$$

joten matriisin A kaikki ominaisarvot ovat joko ykkösiä tai nollia.

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrinen reaalimatriisi

- A on positiivisesti definiitti jos $x^T Ax > 0$ kaikilla $x \neq 0$, merkitään $A > 0$.
- A on positiivisesti semidefiniitti jos $x^T Ax \geq 0$ kaikilla x , merkitään $A \geq 0$.
- $A > B$ jos $A - B > 0$ ja $A \geq B$ jos $A - B \geq 0$.

Esimerkki 2. *Jos $A \geq 0$ ja λ matriisin A mielivaltainen ominaisarvo ja x sitä vastaava ominaisvektori. Tällöin*

$$\lambda x = Ax \implies \lambda \|x\|^2 = x^T Ax \geq 0 \implies \lambda \geq 0,$$

joten matriisin A kaikki ominaisarvot ovat epänegatiivisia.

Lause 1 (Schurin lause). *Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrinen. Tällöin on olemassa ortogonaalinen neliömatriisi Q ja diagonaali matriisi Λ siten että*

$$A = Q\Lambda Q^T. \tag{1.2}$$

Koska Q on ortogonaalinen neliömatriisi niin Q^T on sen käänteismatriisi. Yhtälöstä (1.2) seuraa, että $AQ = Q\Lambda$, joten diagonaalimatriisin Λ diagonaalialkiot ovat matriisin A ominaisarvot ja matriisin Q pystyrivit ovat näihin ominaisarvoihin liittyvät normalisoidut ominaisvektorit.

Määritelmä 1 (Matriisin $A \geq 0$ neliöjuuri). *Schurin lauseen mukaan symmetrinen positiivisesti semidefiniitti matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ voidaan kirjoittaa muotoon*

$$A = Q[\lambda_1, \dots, \lambda_n]Q^T.$$

*missä $\lambda_i \geq 0$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$ (Esimerkki 2). Määritellään matriisin A neliöjuureksi**

$$A^{\frac{1}{2}} = Q[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}]Q^T.$$

*Yleensä matriisia B kutsutaan matriisin A neliöjuureksi jos $A = BB$. Joissakin tapauksessa myös matriisia C kutsutaan matriisin A neliöjuureksi jos $A = CC^T$. Kumpikaan yllä olevista matriiseista (B tai C) ei ole yksikäsitteinen. Huomaa, että matriisi $\Sigma^{\frac{1}{2}} \geq 0$ toteuttaa molemmat määritelmät ja on yksikäsitteinen.

1.2 Ylimäärätty lineaarinen yhtälöryhmä

Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$Ax = y, \quad (1.3)$$

missä $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $y \in \mathbb{R}^m$. Jos $m > n$ niin systeemiä kutsutaan ylimäärätyksi, jollainen voi esiintyä esimerkiksi silloin kun mittauksia on enemmän kuin tuntemattomia. Yleisesti ottaen ylimäärätyllä ryhmällä ei ole tarkkaa ratkaisua, jolloin eräs mahdollisuus on etsiä ryhmän nk. pienimmän neliösumman ratkaisu eli

$$\hat{x} = \operatorname{argmin}_x \|y - Ax\|^2. \quad (1.4)$$

Oletetaan, että $\operatorname{rank}(A) = n$. Koska (harjoitustehtävä 1.3)

$$\|y - Ax\|^2 = \|A((A^T A)^{-1} A^T y - x)\|^2 + \|y - A(A^T A)^{-1} A^T y\|^2, \quad (1.5)$$

niin yhtälön (1.4) ratkaisu on

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y. \quad (1.6)$$

Mikäli yhtälöryhmää $Ax = y$ on tarkoitus ratkaista Matlab ohjelmistolla niin kannattaa käyttää takakeno-komentoa $A \setminus y$. Yleisemmässä muodossa lineaarinen yhtälöryhmä esiintyy muun muassa Matriisilaskenta 1 kurssilla [22].

Esimerkki 3. *Olkoon mittaus y ja alkuarvaus x_0 annettu. Laske estimaatti \hat{x} , joka minimoi lausekkeen $\|y - Hx\|^2 + \|x_0 - x\|^2$.*

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \operatorname{argmin}_x (\|y - Hx\|^2 + \|x_0 - x\|^2) \\ &= \operatorname{argmin}_x \left(\left\| \begin{bmatrix} y \\ x_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H \\ I \end{bmatrix} x \right\|^2 \right) \\ &\stackrel{(1.6)}{=} (H^T H + I)^{-1} (H^T y + x_0). \end{aligned}$$

Esimerkki 4. *Autoilija ajoi suoraa tietä ja sai seuraavat kaksiulotteiset paikkaratkaisut $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$*

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \right\}$$

Ratkaise tien yhtälö $y = ax + b$ siten että virhe $\sum_{i=1}^5 \|y_i - (ax_i + b)\|^2$ minimoituu.

Nyt

$$\sum_{i=1}^5 \|y_i - (ax_i + b)\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 = \|y - Az\|^2$$

Yhtälön (1.6) mukaan ratkaisu on

$$\hat{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T y = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{26} \\ \frac{14}{26} \end{bmatrix}.$$

Joten ratkaistu tien yhtälö on $y = \frac{17}{26}x + \frac{7}{13}$.

1.3 Todennäköisyyslaskenta

Tässä luvussa kerrataan lyhyesti todennäköisyyslaskennan perusteita keskittyen normaalijakaumaa ja ehdolliseen todennäköisyyteen. Satunnaismuuttujan määritelmää ei anneta tässä, määritelmä löytyy prujusta [10]. Tässä kappaleessa merkitään satunnaismuuttujaa tummennetulla symbolilla esim. \mathbf{x} , joka voi olla joko vektori- tai skalaariarvoinen satunnaismuuttuja. Myöhemmissä kappaleissa tummennetun symbolin merkitys selviää asiayhteydestä. Satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheysfunktiota merkitään $f_{\mathbf{x}}(x)$ tai $p_{\mathbf{x}}(x)$ ja kertymäfunktiota $F_{\mathbf{x}}(x)$. Satunnaismuuttujien riippumattomuus on keskeinen käsite: sitä tarvitaan muun muassa suodatuksessa luvussa 3.

Määritelmä 2 (Riippumattomuus). *Satunnaismuuttujat $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ovat riippumattomia, jos*

$$F_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k F_{\mathbf{x}_i}(x_i), \quad \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n.$$

Lause 2. *Satunnaismuuttujat $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ovat riippumattomia, jos ja vain jos*

$$f_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k f_{\mathbf{x}_i}(x_i), \quad \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n.$$

Esimerkki 5. *Olkoon kaksiulotteisen satunnaismuuttujan $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ tiheysfunktio*

$$f_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{kun } x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Ovatko satunnaismuuttujat \mathbf{x}_1 ja \mathbf{x}_2 riippumattomat?

Nyt reunajakaumien tiheysfunktiot ovat

$$f_{\mathbf{x}_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(x_1, x_2) dx_2 = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x_1^2}, & \text{kun } |x_1| \leq 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \text{ ja}$$

$$f_{\mathbf{x}_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(x_1, x_2) dx_1 = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x_2^2}, & \text{kun } |x_2| \leq 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Koska esimerkiksi

$$f_{\mathbf{x}_1}(0)f_{\mathbf{x}_2}(0) = \frac{4}{\pi^2} \neq \frac{1}{\pi} = f_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(0, 0),$$

niin lauseen 2 mukaan satunnaismuuttujat \mathbf{x}_1 ja \mathbf{x}_2 eivät ole riippumattomat.

Määritelmä 3 (Odotusarvo). Oletetaan, että \mathbf{x} on jatkuva satunnaismuuttuja ja integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| f_{\mathbf{x}}(u) du$$

suppenee. Tällöin satunnaismatriisin $g(\mathbf{x})$ odotusarvo on

$$E(g(\mathbf{x})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f_{\mathbf{x}}(u) du.$$

Odotusarvon lineaarisuudesta seuraa, että

Lause 3. Jos $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ja $b \in \mathbb{R}^p$ ovat vakioita, niin

$$E(A\mathbf{x} + b) = AE(\mathbf{x}) + b.$$

Satunnaismuuttujan \mathbf{x} odotusarvon $\mu_{\mathbf{x}} = E(\mathbf{x})$ lisäksi satunnaismuuttujan $(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})^T$ odotusarvo on tärkeä suure. Tätä odotusarvoa kutsutaan satunnaismuuttujan \mathbf{x} kovarianssimatriisiksi ja merkitään

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = V(\mathbf{x}) = E((\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})^T).$$

Huomaa, että kovarianssimatriisi $\Sigma_{\mathbf{x}} \geq 0$. Satunnaismuuttujan \mathbf{x} korrelaatiomatriisi on

$$R_{\mathbf{x}} = D\Sigma_{\mathbf{x}}D, \tag{1.7}$$

missä D on lävistäjämatriisi, jonka lävistäjällä on kovarianssimatriisin $\Sigma_{\mathbf{x}}$ lävistäjäalkioiden käänteislukujen neliöjuuret.

Esimerkki 6. Olkoon \mathbf{x}_i riippumattomasti samoin jakautuneita jatkuvia satunnaismuuttujia, siten että $E(\mathbf{x}_i) = \mu$ ja $V(\mathbf{x}_i) = \Sigma$. Määritellään satunnaismuuttuja $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$. Nyt

$$\begin{aligned} E(\bar{\mathbf{x}}) &= \int \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{k=1}^n f_{\mathbf{x}_k}(x_k) dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int x_i f_{\mathbf{x}_i}(x_i) dx_i = \mu \quad \text{ja} \\ V(\bar{\mathbf{x}}) &= \int \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu) \right)^T \prod_{k=1}^n f_{\mathbf{x}_k}(x_k) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int (x_i - \mu)(x_j - \mu)^T \prod_{k=1}^n f_{\mathbf{x}_k}(x_k) dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n} \Sigma. \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujaa $\bar{\mathbf{x}}$ kutsutaan parametrin μ harhattomaksi estimaattoriksi koska $E(\bar{\mathbf{x}} - \mu) = 0$. Lisäksi koska $V(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{n} \Sigma \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, niin tästä seuraa estimaattorin tarkentuvuus eli jokaisella $\varepsilon > 0$ $P(\|\bar{\mathbf{x}} - \mu\| > \varepsilon) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$.

1.3.1 Normaalijakauma

Oletetaan, että yksiulotteinen jatkuva normaalijakauma on tunnettu. Määritellään n -ulotteinen normaalijakauma seuraavasti.

Määritelmä 4 (Normaalijakauma). Olkoon \mathbf{x} n -dimensionaalinen satunnaismuuttuja, $\mu \in \mathbb{R}^n$ ja $0 \leq \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tällöin \mathbf{x} noudattaa n -ulotteista normaalijakaumaa parametrein μ ja Σ , jota merkitsemme $\mathbf{x} \sim N(\mu, \Sigma)$ tai $\mathbf{x} \sim N_n(\mu, \Sigma)$, jos satunnaismuuttujalla $a^T \mathbf{x}$ noudattaa yksiulotteista jatkuvaa normaalijakaumaa tai on vakiosatunnaismuuttuja jokaisella kiinteällä vektorilla $a \in \mathbb{R}^n$.

Olkoon $\mathbf{x} \sim N(\mu, \Sigma)$ tällöin normaalijakauman parametrit ovat satunnaismuuttujan \mathbf{x} odotusarvo $\mu = E(\mathbf{x})$ ja kovarianssimatriisi $\Sigma = V(\mathbf{x})$. Olkoon $\mathbf{x} \sim N(\mu, \Sigma)$, jos $\Sigma > 0$ niin tällöin satunnaismuuttujan \mathbf{x} tiheysfunktio on

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right). \quad (1.8)$$

Mikäli Σ ei ole positiividefiniitti niin se on singulaarinen, jolloin puhutaan singulaarisesta normaalijakaumasta. Singulaariseen normaalijakaumaan törmää tälläkin kurssilla. Esimerkiksi luvussa 3 tilamallin virhe \mathbf{w}_{k-1} (3.1) voi hyvin noudattaa singulaarista normaalijakaumaa. Tämä tapahtuu esimerkiksi silloin kun tiedämme, että käyttäjä on paikallaan, jolloin paikan tilamallina on yksinkertaisesti $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$, missä $\mathbf{w}_{k-1} \sim N(0, 0)$.

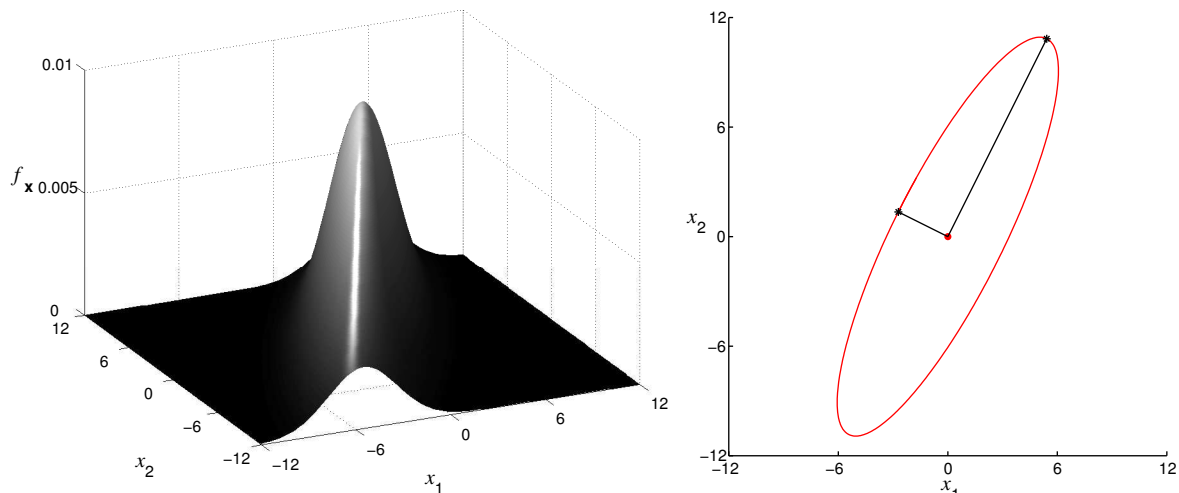
Esimerkki 7 (Normaalijakauman visualisointi). Kuvassa 1.1 on havainnollistettu satunnaismuuttujan

$$\mathbf{x} \sim N(0, \Sigma), \quad (1.9)$$

missä

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 24 & 52 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

tiheysfunktiota alueessa $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 12 \text{ ja } |x_2| \leq 12 \right\}$.



Kuva 1.1: Kuvassa on havainnollistettu normaalijakauman (1.9) tiheysfunktiota kahdella eri tavalla.

Vasemmalla puolella kuvassa 1.1 on piirretty tiheysfunktion (1.8) arvoja ja oikealla puolella on piirretty tiheysfunktion tasa-arvokäyrä, jonka sisällä on 68% todennäköisyyssmassasta, katso

harjoitustehtävä 1.10. Oikean puoleiseen kuvaan on myös piirretty janat jotka ovat ominaisvektoreiden suuntaisia ja joiden pituus on verrannollinen vastaavien ominaisarvojen neliöjuureen.

Lause 4. Jos $\mathbf{x} \sim N(\mu, \Sigma)$ ja $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + b$ niin $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{A}\mu + b, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T)$.

Esimerkki 8 (Normaalisti jakautuneiden satunnaismuuttujien generointi). Jos $\mathbf{u} \sim N_n(0, \mathbf{I})$ niin satunnaismuuttuja $\mathbf{x} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{u} + \mu$ on normaalijakautunut parametrein μ ja Σ (lause 4) ts.

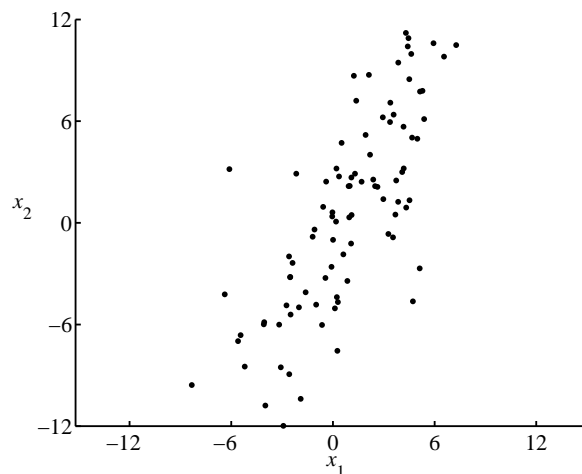
$$\mathbf{x} \sim N_n(\mu, \Sigma).$$

Joten jos osaamme generoida satunnaismuuttujia normaalijakaumasta $N_n(0, \mathbf{I})$ niin osaamme generoida satunnaismuuttujia mielivaltaisesta normaalijakaumasta $N_n(\mu, \Sigma)$. Matlab-ohjelmassa normaalijakautuneita satunnaismuuttujia voi generoida esimerkiksi komennoilla:

$$\begin{aligned} x1 &= \text{sqrtm}(\text{Sigma}) * \text{randn}(n, 1) + \text{mu} \text{ tai} \\ x2 &= \text{chol}(\text{Sigma}, 'lower') * \text{randn}(n, 1) + \text{mu}. \end{aligned}$$

Vaikka molemmat satunnaismuuttujat x_1 ja x_2 noudattavat normaalijakaumaa parametrein μ ja Σ ne eivät kuitenkaan ole sama satunnaismuuttuja koska kerroinmatriisit (joita merkitään matriisilla \mathbf{A} , lause 4) $\text{sqrtm}(\text{Sigma})$ ja $\text{chol}(\text{Sigma}, 'lower')$ ovat erisuuret, molemmat toteuttavat kuitenkin vaadittavan ehdon $\Sigma = \mathbf{AA}^T$, katso myös sivun 5 alaviite. Uusimmissa Matlab-ohjelmissa on myös valmis komento `mvnrnd(mu', Sigma)'` (multi)normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien generointiin, joka perustuu Choleskyn hajotelmaan.

Kuvassa 1.2 on piirretty sadan kappaleen otos, osa otoksesta on kuvan ulkopuolella, esimerkissä 7 olleesta normaalijakaumasta (1.9). Näin ollen voit verrata kuvaa 1.2 kuvaan 1.1.



Kuva 1.2: 100 näytteen otos normaalijakaumasta (1.9).

Lause 5. Olkoon $\mathbf{x} \sim N(\mu, \Sigma)$. Tällöin \mathbf{Ax} ja \mathbf{Bx} ovat riippumattomia jos ja vain jos $\mathbf{A}\Sigma\mathbf{B}^T = 0$.

Esimerkki 9. Olkoon

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix}\right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\mathbf{y}.$$

Ovatko satunnaismuuttujat \mathbf{z} ja \mathbf{y} riippumattomat?

Koska

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} & \Sigma_{xy} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

niin satunnaismuuttujat \mathbf{z} ja $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$ ovat riippumattomat (Lause 5).

1.3.2 χ^2 -jakauma *

Määritelmä 5. Satunnaismuuttuja \mathbf{z} on χ^2 jakautunut vapausastein n , merkitään $\mathbf{z} \sim \chi^2(n)$, mikäli sillä on sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$, missä $\mathbf{x} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Esimerkki 10. Olkoon $\mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ ei-singulaarinen satunnaismuuttuja. Nyt $\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, jollon

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2(n).$$

Määritelmä 6. Satunnaismuuttuja \mathbf{z} on epäkeskeisesti χ^2 jakautunut vapausastein n ja epäkeskeisyysparametrein λ , merkitään $\mathbf{z} \sim \chi^2(n, \lambda)$, mikäli sillä on sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$, missä $\mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ ja $\lambda = \boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\mu}$.

Lause 6. Olkoon $\mathbf{x} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ ei-singulaarinen satunnaismuuttuja ja matriisi A symmetrinen sekä matriisi $A\Sigma$ idempotentti. Tällöin

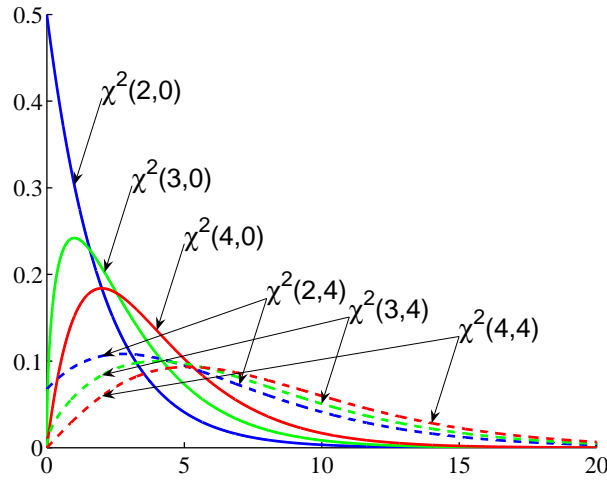
$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \sim \chi^2(\text{rank}(A), \boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\mu}).$$

Todistus. Olkoon $B = \Sigma^{\frac{1}{2}} A \Sigma^{\frac{1}{2}}$. Matriisi B on symmetrinen koska matriisit A ja $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ ovat symmetrisiä ja idempotentti koska

$$BB = \Sigma^{\frac{1}{2}} A \Sigma A \Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma^{\frac{1}{2}} A \Sigma A \Sigma \Sigma^{-\frac{1}{2}} \stackrel{\text{idemp.}}{=} \Sigma^{\frac{1}{2}} A \Sigma \Sigma^{-\frac{1}{2}} = B.$$

Schurin lauseen (Lause 1) ja esimerkin 1 mukaan

$$B = Q \begin{bmatrix} I_{\text{rank}(B)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} Q^T,$$



Kuva 1.3: χ^2 -jakaumien tiheysfunktioita.

missä Q on ortogonaalinen. Harjoitustehtävä 1.2 on näyttävä, että $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$. Määritellään $\text{rank}(A)$ -dimensionaalinen satunnaismuuttuja $\mathbf{y} = [\mathbf{I}_{\text{rank}(A)}, 0]Q^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}$. Nyt lauseen 4 mukaan

$$\mathbf{y} \sim N([\mathbf{I}_{\text{rank}(A)}, 0]Q^T\Sigma^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_{\text{rank}(A)}).$$

Määritelmän 6 mukaan

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} Q \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\text{rank}(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} \sim \chi^2(\text{rank}(A), \boldsymbol{\mu}^T A \boldsymbol{\mu}).$$

□

1.3.3 Ehdollinen tiheysfunktio

Bayeslaisessa todennäköisyyslaskennassa ehdollinen tiheysfunktio on keskeisessä asemassa.

Määritelmä 7 (Ehdollinen tiheysfunktio). *Satunnaismuuttujan \mathbf{x} ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $\mathbf{y} = y$ määritellään yhtälöllä*

$$f_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}(x|y) = \frac{f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y)}{f_{\mathbf{y}}(y)},$$

pisteissä, joissa nimittäjä on positiivinen.

Lauseen 2 mukaan huomaamme, että satunnaismuuttujat \mathbf{x} ja \mathbf{y} ovat riippumattomat jos ja vain jos $f_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}(x|y) = f_{\mathbf{x}}(x)$. Ehdollinen odotusarvo määritellään vastaavasti.

Määritelmä 8 (Ehdollinen odotusarvo). *Satunnaismuuttujan \mathbf{x} ehdollinen odotusarvo ehdolla $\mathbf{y} = y$ määritellään yhtälöllä*

$$E(\mathbf{x}|\mathbf{y} = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}(x|y) dx.$$

On hyvä huomata, että ehdollinen odotusarvo $E(\mathbf{x}|\mathbf{y} = y)$ riippuu satunnaismuuttujan \mathbf{y} saamasta arvosta y ja on näin ollen itsekin satunnaismuuttuja, joka on määritelty samassa todennäköisyys-avaruudessa kuin satunnaismuuttuja \mathbf{y} .

Esimerkki 11 (Ehdollinen tiheysfunktio). Oletetaan että käyttäjän tila \mathbf{x} on normaalijakaunut $\mathbf{x} \sim N(0, 16)$ ja saadaan mittaus

$$\mathbf{y} = \frac{3}{2}\mathbf{x} + \mathbf{v},$$

missä virhe $\mathbf{v} \sim N(0, 16)$ on riippumaton tilasta (satunnaismuuttujasta \mathbf{x}). Tällöin yhteisjakauman $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$ tiheysfunktio on satunnaismuuttujien \mathbf{x} ja \mathbf{v} tiheysfunktioiden tulo. Harjoitustehtävän (1.13) perusteella

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \sim N(0, 16 \cdot \mathbf{I}),$$

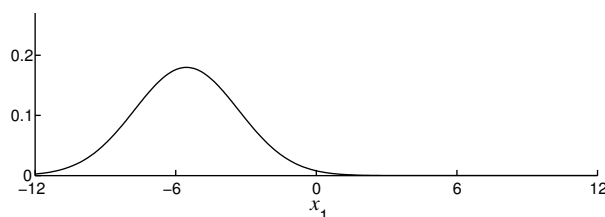
jolloin lauseen 4 mukaan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim N\left(0, \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 24 & 52 \end{bmatrix}\right).$$

Harjoitustehtävänä (1.14) on näyttää, että tällöin

$$\mathbf{x}|\mathbf{y} \sim N\left(\frac{6}{13}y, \frac{64}{13}\right). \quad (1.10)$$

Esimerkiksi jos saadaan havainto $\mathbf{y} = -12$ niin tällöin satunnaismuuttujan \mathbf{x} ehdollinen jakauma ehdolla $\mathbf{y} = -12$ on $N(-5\frac{7}{13}, 4\frac{12}{13})$. Graafisesti ehdollinen tiheysfunktio saadaan normalisoimalla tasolla $\mathbf{y} = y$ oleva tiheysfunktio-osa. Vertaa kuvassa 1.1 vasemmalla puolella tasolla $\mathbf{y} = -12$ olevaa funktiota ja saatua normaalijakauman tiheysfunktioita (Kuva 1.4).



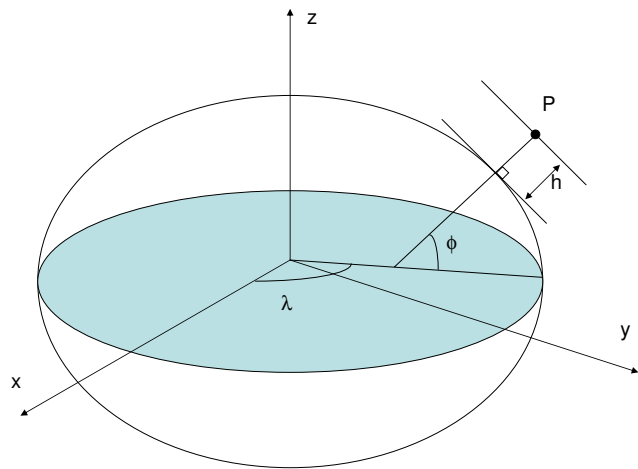
Kuva 1.4: Kuvassa on piirretty normaalijakauman $N(-5\frac{7}{13}, 4\frac{12}{13})$ tiheysfunktio välillä $[-12, 12]$, jota voi verrata kuvan 1.1 vasempaan puoleen.

1.4 Koordinaatistot*

JUSSI COLLIN

Jotta paikannus olisi mielekäästä, on paikkaratkaisut annettava etukäteen sovitussa koordinaatistossa. Lineaarinen koordinaatisto muodostetaan origon ja kannan avulla, esimerkiksi $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, missä vektorit \mathbf{u} , \mathbf{v} ja \mathbf{w} ovat lineaarisesti riippumattomia. Nyt mikä tahansa paikka voidaan esittää komponenttiesityksenä $\mathbf{r} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}$, ja koordinaatit x , y ja z ovat yksikäsittisesti määrättyjä.

Paikannuksessa törmää usein myös käyräviivaisiin koordinaatistoihin, tarkastellaan esimerkkinä geodeettista koordinaatistoa. Ensin generoidaan pyörähdysellipsoidi pyöräyttämällä ellipsiä pikkuakselin ympäri. Tämä ellipsoidi yleensä karakterisoidaan kahdella parametrilla, isoakselin pituus a , ja litistyssuhde $f = \frac{a-b}{a}$ (b on pikkuakselin pituus). Geodeettiset koordinaatit tässä koordinaatistossa on määritelty kuvan 1.5 mukaisesti.



ϕ , geodeettinen leveysaste. Huomaa että kyseessä on ekvaattoritason ja ellipsoidipinnan normaalin välinen kulma.

Kuva 1.5: Geodeettiset koordinaatit. Kuvassa myös vastaavan suorakulmisen koordinaatiston akselit

λ , geodeettinen pituusaste. Referenssi-meridiaanin ja paikan P meridiaanin välinen kulma.

h , geodeettinen korkeus. Etumerkillinen etäisyys ellipsoidipinnasta.

Matemaattisen määritelmän lisäksi koordinaatisto pitää sitoa maastoon. Ongelmana tässä on maapallon dynaamisuus – maapallo ei ole jäykkä kappale. Koordinaatiston *realisaatio* sidotaankin johonkin ajanhetkeen, eli epookkiin. Tyypillisesti origo on maapallon massakeskipiste, positiivinen z-akseli kulkee pohjoisnavan läpi, referenssimeridiaani kulkee Greenwichin observatorion läpi ja isoakselin pituus sekä litistyssuhde saadaan sovittamalla ellipsoidi mahdollisimman hyvin maapallon keskimääräiseen merenpinnankorkeuteen. GPS-järjestelmä käyttää World Geodetic System 84 (WGS-84) koordinaattijärjestelmää [28]. Suomalainen koordinaattijärjestelmän realisaatio (EUREF-FIN) on määritelty Julkisen hallinnon suosituksessa 153 [9].

1.4.1 Lineaarinen koordinaatiston vaihto

Paikannuslaskuissa joudutaan hyvin usein vaihtamaan koordinaatistoa. Esimerkiksi GPS-laskuissa aloitetaan inertiakoordinaatistosta (satelliittien radat), siirrytään geodeettisiin koordinaatteihin (maapallon mukana pyörivä koordinaatisto) ja lopuksi yleensä käytetään vielä lokaalia koordinaatistoa jotta saadaan paikka tulostettua 2D kartalle. Inertiapaikannuslaskuissa koordinaatistoja joudutaan vaihtamaan ehkä vieläkin useammin; anturit muodostavat oman koordinaatiston, anturimittaukset ovat suhteessa inertiakoordinaatistoon ja gravitaation laskeamiseen tarvitaan sijainti geodettisessä koordinaatistossa. Merkitään A -koordinaatit vektorilla $\mathbf{m}^A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$ ja B -koordinaatit vektorilla $\mathbf{m}^B = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$. Tässä siis α_i ovat paikan P koordinaatit koordinaatistossa A ja β_i ovat saman paikan koordinaatit koordinaatistossa B . Koordinaatiston vaihdossa etsitään funktiota

$$\mathbf{f}_A^B(\mathbf{m}^A) = \mathbf{m}^B. \quad (1.11)$$

Linearisissa koordinaatistoissa tämä funktio on helppo löytää. Oletetaan että koordinaatistoilla on yhteinen origo. Paikkavektori \mathbf{q} voidaan kirjoittaa kantavektoreiden ja koordinaattien avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{X}_A \mathbf{m}^A \\ \mathbf{q} &= \mathbf{X}_B \mathbf{m}^B, \end{aligned}$$

missä \mathbf{X} :n sarakkeet ovat kyseisen koordinaatiston kantavektorit. Kantavektoreista muodostettu matriisi on ei-singulaarinen, joten etsitty muunnos saadaan laskemalla

$$\mathbf{m}^B = \mathbf{X}_B^{-1} \mathbf{X}_A \mathbf{m}^A.$$

Tulevissa yhtälöissä käytetyt kantavektorit ovat ortonormaaleja, ja silloinhan $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$. Lisäksi asetetaan A :lle luonnollinen kanta $\mathbf{X}_A = \mathbf{I}$, eli $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ jolloin muunnos yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{m}^B = \mathbf{X}_B^T \mathbf{m}^A.$$

Nyt voidaankin määrittää paikannuksessa usein käytetty suuntakosinimatriisi \mathbf{C}_A^B :

$$\mathbf{m}^B = \mathbf{C}_A^B \mathbf{m}^A, \quad (1.12)$$

jossa \mathbf{m}^A on siis vektori ilmaistuna koordinaatiston A koordinaateissa ja \mathbf{m}^B on sama vektori koordinaatiston B koordinaateissa. Harjoitustehtävänä osoitetaan että

$$\mathbf{C}_A^B = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) & \cos(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{u}, \mathbf{e}_3) \\ \cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) & \cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_3) \\ \cos(\mathbf{w}, \mathbf{e}_1) & \cos(\mathbf{w}, \mathbf{e}_2) & \cos(\mathbf{w}, \mathbf{e}_3) \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

missä $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on B :n ortonormaali kanta. Koordinaatiston vaihto takaisin A :n on helppoa, koska $\mathbf{C}_B^A = (\mathbf{C}_A^B)^{-1} = (\mathbf{C}_A^B)^T$. Ketjusääntöä tarvitaan erityisesti inertiapaikannuslaskuissa:

$$\mathbf{C}_A^D = \mathbf{C}_B^D \mathbf{C}_A^B. \quad (1.14)$$

Yhtälö (1.13) on varsin mukavassa muodossa koordinaatistojen kiertoja ajatellen.

Esimerkki 12. Oletetaan että koordinaatistot $A1$ ja $A2$ ovat aluksi yhtenevät. Kierretään $A2$ koordinaatistoa z -akselin ympäri kulman θ verran. Koordinaatistoa $A1$ käyttävä paikantaja huomaa kiinnostavan esineen paikassa $\mathbf{a}^{A1} = [1 \ 1 \ 1]^T$. Mistä koordinaatistoa $A2$ käyttävä paikantaja löytää tämän esineen?

Vastaus: Kierrot on hyvä heti määritellä oikeakätisiksi, eli vektorin \mathbf{v} positiivinen kierto akselin \mathbf{w} ympäri vie \mathbf{v} :n kärkeä suuntaan $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$. Huom: Koordinaatiston kierrossa jokainen kantavektori kierretään. Lasketaan suuntakosinimatriisi yhtälön (1.13) mukaisesti:

$$\mathbf{C}_{A1}^{A2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) & \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) & \cos(\theta) & \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) & \cos(0) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Ratkaisu kysymykseen on siis $\mathbf{a}^{A2} = \mathbf{C}_{A1}^{A2} \mathbf{a}^{A1} = [\cos(\theta) + \sin(\theta) \quad \cos(\theta) - \sin(\theta) \quad 1]^T$.

Jotta päästään yleisempiin pyöryksiin on hyvä esitellä muutamia asiaa helpottavia matemaattisia työkaluja. $(\mathbf{a} \times)$ tarkoittaa ristitulon (3x3) matriisimuotoa:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times) \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b} \quad (1.16)$$

Suuntakosinimatriisi ei ole ainoa tapa kuvata koordinaatistojen orientaatioita. Voidaan todistaa (katso esimerkiksi [26, 16]), että suuntakosinimatriisi on esitettävissä muodossa

$$\mathbf{C}_{A2}^{A1} = \mathbf{I} + \frac{\sin(p)}{p} (\mathbf{p} \times) + \frac{1 - \cos(p)}{p^2} (\mathbf{p} \times)(\mathbf{p} \times), \quad (1.17)$$

missä \mathbf{p} on pyörähdysvektori (rotation vector) ja p sen pituus. Kun koordinaatistoa $A1$ pyöritetään akselin \mathbf{p} ympäri kulman p verran, saadaan uusi koordinaatisto $A2$, ja yhtälö (1.17) kertoo suuntakosinimatriisin ja pyörähdysvektorin välisen yhteyden. Harjoitustehtävänä toteat, että ei ole väliä ilmoitetaanko pyörähdysvektori koordinaatiston $A1$ vai $A2$ koordinaateissa. Esimerkin 12 pyörähdysvektori on $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ \theta]^T$, ja harjoitustehtäväksi jää osoittaa että kun tämä sijoitetaan kaavaan (1.17) saadaan sama matriisin (1.15) transpoosi, kuten pitääkin.

Koordinaatistojen väliset muunnokset yllä esitettiin matriisien avulla. Toinen yleinen tapa on käyttää kvaternionalgebraa, jolloin esimerkiksi matriisia (1.17) vastaa kvaternioni (ks. esimerkiksi [5, 25, 16])

$$q_{A2}^{A1} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{2}p) \\ \sin(\frac{1}{2}p) \mathbf{p}/p \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

1.5 Liikkuvat koordinaatistot *

Linearisesti toisiinsa nähden liikkuvien koordinaatistojen muunnokset ovat käytännössä nopeuksien yhteenlaskua ja origon siirtoa. Tässä kappaleessa alustetaan hieman muunnoksia toistensa suhteen pyörivissä koordinaatistoissa.

Aloitetaan yksinkertaisesta pyörimisestä, jossa pyörähdysvektori (siis kulmanopeus ja pyörähdysakselin suunta) pysyvät vakiona. Oletetaan jälleen että koordinaatistot $A1$ ja $A2$ ovat aluksi ($t = 0$) yhtenevät. Tällöin pyörähdysvektori voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{p} = \omega t \mathbf{u}, \quad (1.19)$$

jossa $\omega (= \dot{p})$ on kulmavauhti (rad/s), t on aika ja \mathbf{u} on yksikkövektori. Yhtälön (1.19) derivaatta ajan suhteen on siis kulmanopeus

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{p}} = \omega \mathbf{u}. \quad (1.20)$$

Nyt suuntakosinimatriisiin (1.17) derivaatta ajan suhteen on

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_{A2}^{A1} &= \omega \cos(\omega t) (\mathbf{u} \times) + \omega \sin(\omega t) (\mathbf{u} \times) (\mathbf{u} \times) \\ &= [\mathbf{I} \cos(\omega t) + \sin(\omega t) (\mathbf{u} \times)] (\mathbf{w} \times). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Tässä kohdassa kannattaa huomata että $\mathbf{C}_{A2}^{A1} (\mathbf{w} \times)$ antaa saman tuloksen*.

Esimerkki 13. Oletetaan että esimerkin 12 kiertokulma on ajasta riippuva, $\theta(t) = \omega t$. Miten esine liikkuu koordinaatistoon $A2$ sidotun käyttäjän mielestä ?

Vastaus:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{A1} &= \mathbf{C}_{A2}^{A1} \mathbf{a}^{A2} && \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{a}^{A1}}{dt} &= \frac{d\mathbf{C}_{A2}^{A1}}{dt} \mathbf{a}^{A2} && \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{a}^{A1}}{dt} &= \frac{d\mathbf{C}_{A2}^{A1}}{dt} \mathbf{a}^{A2} + \mathbf{C}_{A2}^{A1} \frac{d\mathbf{a}^{A2}}{dt} && \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{a}^{A1}}{dt} &= \mathbf{C}_{A2}^{A1} (\mathbf{w} \times) \mathbf{a}^{A2} + \mathbf{C}_{A2}^{A1} \frac{d\mathbf{a}^{A2}}{dt} && \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{a}^{A1}}{dt} &= \mathbf{C}_{A2}^{A1} \left(\frac{d\mathbf{a}^{A2}}{dt} + \mathbf{w} \times \mathbf{a}^{A2} \right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Tämä Coriolis-yhtälö kertoo miten nopeusvektoreita muunnetaan pyörivästä koordinaatistosta toiseen. Vastaavasti \mathbf{a} :n derivaatta $A2$ koordinaatistossa on

$$\frac{d\mathbf{a}^{A2}}{dt} = \mathbf{C}_{A1}^{A2} \left(\frac{d\mathbf{a}^{A1}}{dt} - \mathbf{w} \times \mathbf{a}^{A1} \right). \quad (1.23)$$

Nyt \mathbf{a}^{A1} on vakio (esine ei liiku $A1$ koordinaatiston suhteen), joten

$$\frac{d\mathbf{a}^{A2}}{dt} = -\mathbf{C}_{A1}^{A2} (\mathbf{w} \times) \mathbf{a}^{A1}. \quad (1.24)$$

Sijoitetaan $\theta(t) = \omega t$ yhtälöön (1.15) ja koska $\mathbf{w} = [0 \ 0 \ \omega]^T$, saadaan tulos

$$\frac{d\mathbf{a}^{A2}}{dt} = [\omega \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t) \quad -\omega \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t) \quad 0]^T. \quad (1.25)$$

*Asian toteamista helpottaa kaava $(\mathbf{a} \times)(\mathbf{a} \times) = -\|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{I} + \mathbf{a} \mathbf{a}^T$

Ketjusäännön avulla voidaan lisätä alkuasentotieto, eli jos aluksi ($t = 0$) koordinaatistojen välinen yhteys on $C_{A2(0)}^{A1}$ niin

$$C_{A2}^{A1} = C_{A2(0)}^{A1} C_{A2}^{A2(0)}$$

ja matriisi $C_{A2(0)}^{A1}$ on vakio ajan suhteen ja siten

$$\dot{C}_{A2}^{A1} = C_{A2(0)}^{A1} \dot{C}_{A2}^{A2(0)}.$$

Inertiapaikannuksessa tarvitaan seuraavia koordinaatistoja:

- *Inertiakoordinaatisto* (I), ei-pyörivä, ei-kiihtyvä koordinaatisto. Newtonin liikelait toimivat tässä koordinaatistossa. Jossain tapauksissa (suhteellisuusteoria) pitää vielä olettaa että I-koordinaatistossa ei ole gravitaatiota, mutta tämän kurssin laskuihin I-koordinaatiston approksimaatioksi käy nk. ECI (Earth Centered Inertial) koordinaatisto. ECI:n origo on maan massakeskipiste, ja akselit pitävät suuntansa tähtiin nähden.
- *Maapalloon sidottu koordinaatisto* (E), koordinaattiakselit on sidottu maapalloon, z-akseli on maapallon pyörimisakselin suuntaisten, x- ja y-akselit ovat päiväntasaajan tasossa. Kirjallisuudessa käytetään usein lyhennettä ECEF (Earth Centered Earth Fixed). Maapallon pyörimisen vuoksi $\mathbf{w}_{IE}^E \approx [0 \ 0 \ 7.29 \times 10^{-5}]^T$ (rad/s).
- *Paikallinen koordinaatisto* (L), akselit määrittävät suunnat ”ylös-alas”, ”pohjoinen-etelä” ja ”länsi-itä”. Usein käytetään ENU (East, North, Up) järjestystä, eli x-akseli osoittaa itään, y-akseli pohjoiseen ja z-akseli osoittaa ylös luotilangan suuntaisesti. Kun origoksi laitetaan käyttäjän paikka, on C_L^E on paikan funktio ja $\mathbf{w}_{IL}^L = \mathbf{w}_{IE}^L + \mathbf{w}_{EL}^L$, missä viimeinen termi kuvaa käyttäjän liikettä maapallon suhteen.
- *Laitteeseen sidottu koordinaatisto* (B), nk. Body-frame. Inertiamittauksissa keskeinen koordinaatisto. Gyrojen mittausta on \mathbf{w}_{IB}^B ja kiihtyvyyssantureiden $\mathbf{a}^B - \mathbf{g}^B$, missä \mathbf{a} on kiihtyvyys ECI:ssä ja \mathbf{g} on paikallinen gravitaatiokiihtyvyys

INS-kirjallisuudessa kulmanopeusvektori esitetään usein indekseihin \mathbf{w}_{IB}^B , mikä tarkoittaa B-koordinaatiston kulmanopeutta I-koordinaatiston suhteen (\mathbf{w}_{IB}), ja vektori on ilmaistu B-koordinaatistossa (\mathbf{w}^B). Alaindeksiä ei siis kannata sekoittaa suuntakosinimatriisiin alaindeksiin. I-koordinaatistolla tarkoitetaan inertiakoordinaatistoa (ei pyöri eikä kiihdy avaruudessa), ja B-koordinaatisto on laitteeseen sidottu koordinaatisto. Vektori \mathbf{w}_{IB}^B on itseasiassa ideaalisen gyrotriadin ulostulo. Yleisesti gyromittausten integrointi yhtälön (1.20) avulla ei tuota pyörähdysvektoria, koska pyörähdysvektorin suunnan muuttuessa ko. yhtälö ei enää päde. Pyörähdysvektorin muutoksen ja mitattavissa olevan kulmanopeusvektorin differentiaaliyhtälö onkin [3]

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{w}_{IB}^B + \frac{1}{2} \mathbf{p} \times \mathbf{w}_{IB}^B + \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{p \sin(p)}{2(1 - \cos(p))}\right) \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{w}_{IB}^B), \quad (1.26)$$

ja yllä käsitellyn yksinkertaisen pyörimisen tapauksessa kaksi viimeistä termiä ovat nollavektoreita. Tähän tapaukseen palataan erillisellä INS-kurssilla.

Harjoitustehtäviä

1.1. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrinen. Osoita, että

$$A > 0 \iff A : n \text{ ominaisarvot positiivisia}$$

$$A > 0 \Rightarrow \det(A) > 0$$

$$A > 0 \iff A^{-1} > 0$$

1.2. Olkoon matriisi $B > 0$ ja A samankokoinen symmetrinen matriisi. Osoita, että

$$\text{rank}(BAB) = \text{rank}(A).$$

1.3. (a) Olkoon matriisin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pystyivät lineaarisesti riippumattomia ($\text{rank}(A) = n$). Näytä, että matriisi $A^T A$ on kääntyvä.

(b) Osoita yhtälö (1.5) oikeaksi.

1.4. Olkoon matriisit $A > 0$ ja $B > 0$. Näytä, että matriisi $A + B$ on kääntyvä.

1.5. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ laske $A^{\frac{1}{2}}$.

1.6. Hae kaikki matriisit $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ siten, että $BB = I$, mitkä saaduista matriiseista ovat symmetrisiä ja positiivisesti definiittejä?

1.7. Käyttäjän on tasavuisen kolmion muotoisen rakennuksen sisäpuolella, jonka seinän pituus on $6l$. Käyttäjän mobiililaitte pystyy mittaamaan etäisyyden jokaiseen seinään ja nämä etäisyydet ovat l , $2l$ ja $3l$. Mikä käyttäjän pienimmän neliösumman estimaatti?

1.8. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ja $b \in \mathbb{R}^p$ vakioita ja \mathbf{x} satunnaismuuttuja siten että $V(\mathbf{x}) = \Sigma$. Laske

$$V(A\mathbf{x} + b)$$

1.9. Tarkastellaan systeemiä $\mathbf{y} = H\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$, missä $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$. Mikä on estimaattorin

$$\hat{\mathbf{x}} = (H^T H)^{-1} H^T \mathbf{y}$$

jakauma? Onko estimaattori harhaton ($E(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = 0$)?

1.10. Anna kuvassa 1.1 oikealla puolella esiintyvän ellipsin yhtälö. (opa. Matlab: $\text{chi2inv}(0.68, 2) \approx 2.279$)

1.11. Olkoon

$$\mathbf{x} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Laske todennäköisyys $P(\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq 0)$.

1.12. Olkoon satunnaismuuttuja $\mathbf{x} \sim \chi^2(n, \lambda)$ jakautunut. Laske $E(\mathbf{x})$.

1.13. Olkoon $\mathbf{x} \sim N(\bar{x}, \Sigma_x)$ ja $\mathbf{y} \sim N(\bar{y}, \Sigma_y)$ riippumattomia satunnaismuuttujia, yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan että kovarianssimatriisit ovat kääntyviä. Osoita, että

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_x & 0 \\ 0 & \Sigma_y \end{bmatrix}\right).$$

opa. Olkoon A ja C neliömatriiseita, tällöin $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(C)$.

1.14. Todista yhtälö (1.10) lähtien määritelmästä 7.

1.15. Johda suuntakosinimatriisi (1.13).

1.16. Johda ketjusääntö (1.14).

1.17. Olkoon \mathbf{p} koordinaatistojen A1 ja A2 välinen pyörähdysvektori. Osoita että $\mathbf{p}^{A1} = \mathbf{p}^{A2}$. Jos $C_{A2}^{A1} \neq I$, niin löytyykö $\mathbf{q} \neq \alpha\mathbf{p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ joka toteuttaa $\mathbf{q}^{A1} = \mathbf{q}^{A2}$?

1.18. Kokeile kaavaa (1.17) vektoreilla $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0 \ \theta]^T$ ja $\mathbf{p}_2 = [0 \ 0 \ -\theta]^T$

1.19. Magneettijuna kulkee Helsingistä Rovaniemelle 300 km/h vauhtia. Kuinka suuri sivuttaisvoima tarvitaan, jotta juna pysyy koko ajan pohjoissuuntaisella radalla?

Mikä on maan pyörimisakselin ja junan kulkusuunnan välinen kulma ajan suhteen?

Oletetaan pallonmuotoinen maapallo säteellä R , junan massa M ja yksinkertaistetaan Helsingin ja Rovaniemen koordinaatit:

Helsinki: $60^\circ 10' 00''$ pohjoista leveyttä $25^\circ 0' 00''$ itäistä pituutta

Rovaniemi: $66^\circ 30' 00''$ pohjoista leveyttä $25^\circ 0' 00''$ itäistä pituutta

1.20. Olkoon matkapuhelimen koordinaatisto (B) seuraavasti määrätty: numeroiden 9-6-3 osoittama suunta x-akseli, numeroiden 9-8-7 osoittama suunta y-akseli, ja z-suunta x-akselin ja y-akselin ristitulo (näytöstä näytön katselijaan). Käännä puhelinta -90 astetta puhelimen y-akselin ympäri. Seuraavaksi, käännä puhelinta 90 astetta x-akselin ympäri. Lopuksi, käännä puhelinta 90 astetta y-akselin ympäri. Tee sama matemaattisesti, eli kirjoita suuntakosinimatriisit. Miten käy jos kiertojärjestystä muuttaa? Entä jos kierroissa käyttääkin kiertymättömän (esim. työpöytäsi sidotun) koordinaatiston akseleita?

1.21. Osoita, että

$$\dot{\mathbf{C}}_{A2}^{A1} = \mathbf{C}_{A2}^{A1}(\mathbf{w} \times).$$

Opa: (1.17), (1.21) ja $\mathbf{u}^T(\mathbf{u} \times) = \dots$

Luku 2

Staattinen paikkaratkaisu

NIILO SIROLA

Paikannuksella (*positioning, localization*) tarkoitetaan vastaanottimen koordinaattien ja mahdollisesti muiden mielenkiintoisten suureiden (nopeus, asento, kellovirhe, jne) estimointia. Paikannustehtävässä voi olla käytössä eri lähteistä tulevia ja monen tyyppisiä mittauksia, jolloin ongelman ratkaisemiseksi muodostetaan ensin mittauksia kuvaava *matemaattinen malli*, ja sovelletaan siihen sopivaa matemaattista koneistoa. Mikään malli ei kuvaa todellisuutta tarkasti, ja usein vaikka ilmiö tunnettaisiinkin kohtalaisen tarkasti päädytään silti käyttämään jotain yksinkertaisempaa mallia koska se sopii parhaiten siihen matemaattiseen menetelmään jota halutaan (osataan?) käyttää ongelman ratkaisuun.

Staattisella paikkaratkaisulla, erotuksena aikasarjaan jota käsitellään luvussa 3, tarkoitetaan yksittäisen paikkaestimaatin laskemista useasta samanaikaisesti tehdystä mittauksesta, riippumatta aimmista tai tulevista mittauksista tai estimaateista. Valitusta mittausmallista riippuen paikannustehtävä voidaan muotoilla epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi joko pienimmän neliösumman mielessä (kappale 2.3), tarkasti (kappale 2.2), tai uskottavuuden (kappale 2.4) tai todennäköisyyden suhteen (kappale 2.5).

Suurin osa staattiseen paikannukseen tarvittavista menetelmistä tulee estimointiteoriasta, ks. esimerkiksi verkosta saatava Kuopion yliopiston luentomoniste [27].

2.1 Mittausyhtälöt

Kaikkia mittausprosessin yksityiskohtia ei yleensä joko tunneta tarkasti tai niitä ei ole järkevää ottaa mukaan malliin. Usein yksinkertaiset mallit ovat riittävän tarkkoja ilman että laskennasta tulee liian työlästä. Esimerkiksi mittausvirhe koostuu aina useista eri osatekijöistä joilla voi olla monimutkaisia keskinäisiä riippuvuuksia, mutta silti se melkein aina mallinnetaan yhdellä normaalijakautuneella termillä.

Mittausmalli voidaan esittää tiheysfunktiolla tai yhtälömuodossa. Aloitetaan yhtälömuodosta, joka on yksinkertaisempi mutta rajoittaa hieman mitä voidaan ottaa mittauksiksi (esim. kaikkien mittausten pitää olla numeerisia). Mittausten ajatellaan muodostuvan ”todellisesta arvosta” ja virheestä:

$$\text{mittaus} = \text{teoreettinen arvo paikassa } \mathbf{x} + \text{virhe.}$$

Kootaan kaikki mitatut arvot vektoriin \mathbf{y} ja kirjoitetaan mittausyhtälöryhmä muotoon

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (2.1)$$

jossa *mittausfunktio* \mathbf{h} saa olla mikä tahansa tunnettu vektoriarvoinen vektorifunktio ja \mathbf{v} on mittausrvirhevektori, jonka todennäköisyysjakauma oletetaan tunnetuksi.*

Esimerkki 14 (Mittausyhtälöitä). *Etäisyysmittaus paikassa \mathbf{s} olevaan asemaan voidaan kirjoittaa mittausyhtälönä*

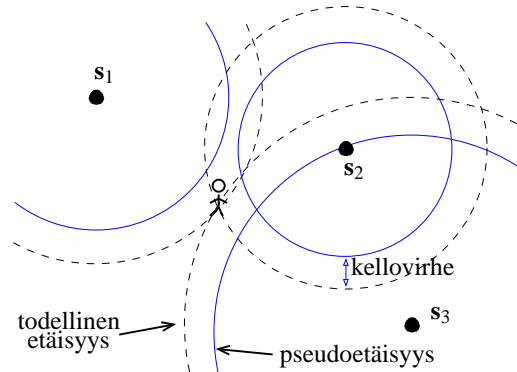
$$r = \|\mathbf{s} - \mathbf{x}\| + v,$$

jossa r on mitattu etäisyys, \mathbf{x} on paikka ja $\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|$ ($= h(\mathbf{x})$) on todellinen etäisyys.

GPS:n pseudoetäisyysmittaus puolestaan voidaan kirjoittaa muotoon

$$\rho = \|\mathbf{s} - \mathbf{x}\| + b + v,$$

jossa b on vastaanottimen kellovirheestä (clock bias) johtuva siirros metreinä. Koska myös kellovirhe b on ratkaistava tuntematon siinä missä paikkakin, liitetään se tilavektoriin siten että tilan kolme ensimmäistä komponenttia, merkitään $\mathbf{x}_{1:3}$, sisältävät paikan ja viimeinen, x_4 , kellovirheen. Jos mittauksia on useaan eri satelliittiin/asemaan, voidaan mittausyhtälöt (2.1) kirjoittaa vektorimuotoon



Kuva 2.1: Kellovirhe näkyy saman suuruisena virheenä kaikissa pseudoetäisyyksissä.

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{x}_{1:3}\| + x_4 \\ \vdots \\ \|\mathbf{s}_n - \mathbf{x}_{1:3}\| + x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Kun mittaukset on tehty ja mittausyhtälöt selvillä, haetaan paikka/tilaestimaatti $\hat{\mathbf{x}}$ joka sopii mittauksiin parhaiten. Ratkaisuja ja ratkaisumenetelmiä on erilaisia riippuen siitä mitä tarkoitetaan sanoilla ”sopii” ja ”parhaiten”. Aina ratkaisu ei ole edes yksikäsitteinen, vaan useampi paikkaehdokas voi sopia mittauksiin yhtä hyvin.

*Tosielämässä mittausrvirheiden jakauman arvioiminen siirtotien, lähettimen ja vastaanottimen ominaisuuksien perusteella tai empiirisesti mittausrdatasta on kokonaan oma ongelmansa johon tässä ei syvennytä. Oletetaan vain että ”jostain” on saatu etukäteen tietää (eli arvattu) mittausrvirheen jakauma tai edes varianssi.

2.2 Suljetun muodon ratkaisut

Suljetun muodon ratkaisu, tai suora ratkaisu, on yleisnimi sekalaiselle joukolle epä-iteratiivisia algoritmeja. Etuna on, ettei algoritmi tarvi alkuarvausta iteraation aloittamiseen, iteraation lopetusehtoja tarvitse virittää, eikä ole pelkoa väärään ratkaisuun suppenemisesta. Jos ongelmalle on useita ratkaisuja, suljetun muodon ratkaisu antaa ne kaikki. Yleispätevää suljetun muodon ratkaisua ei ole, vaan se pitää johtaa erikseen jokaiselle mittausmallille, esim. [1, 6, 15, 21].

Geometrisissa ratkaisuisa ajatellaan, että jokainen mittaus määrittää tila-avaruuteen jonkin pinnan jolla mittausyhtälö toteutuu, esimerkiksi etäisyysmittaus määrää kolmiulotteiseen paikka-avaruuteen pallopinnan, erotusetäisyysmittaus hyperboloidin, jne. Tehtävän ratkaisut ovat kaikki ne pisteet joissa kaikki mittausyhtälöt toteutuvat, eli joissa kaikki mittauspinnat leikkaavat. Toinen lähestymistapa, josta Bancroftin menetelmä alla esimerkkinä, on algebrallinen jossa erilaisilla laskutempuilla koitetaan löytää mittausyhtälöryhmälle erikoisratkaisu.

Suljetun muodon ratkaisuille on käyttöä iteratiivisten menetelmien alkuarvauksina, mutta muuten lähinnä teoreettisessa tutkimuksessa ja ongelman visualisoinnissa, koska niillä on vaikea mallintaa mittausvirheitä.

Esimerkki 15 (Bancroftin menetelmä [1]). *Jos kaikki mittaukset ovat pseudoetäisyysmittauksia (esimerkiksi jos käytetään pelkästään GPS-mittauksia), voidaan eräs pienimmän neliösumman ratkaisu* laskea suljetussa muodossa seuraavasti. Aloitetaan mittausyhtälöryhmästä*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{x}\| + b &= y_1 \\ &\vdots \\ \|\mathbf{s}_n - \mathbf{x}\| + b &= y_n.\end{aligned}$$

Kikka 1: Siirretään b :t yhtälöiden oikealle puolelle ja korotetaan yhtälöt puolittain toiseen. Saadaan n yhtälöä muotoa:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{s}_i - \mathbf{x}\|^2 &= (y_i - b)^2 \\ \Leftrightarrow \|\mathbf{s}_i\|^2 - 2\mathbf{s}_i^T \mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|^2 &= y_i^2 - 2y_i b + b^2.\end{aligned}$$

Huom. puolittain neliöinnistä johtuen ratkaisuun tulee useita haaroja jotka pitää lopuksi kaikki tarkastaa. Esimerkiksi kaikki ratkaisut joille $y_i - b < 0$ ovat mahdottomia.

Kikka 2: Kerätään neliötermit uuteen muuttujaan $\lambda = \|\mathbf{x}\|^2 - b^2$, jolloin saadaan lineaarinen yhtälö jossa on muuttujina \mathbf{x} , b ja λ :

$$2\mathbf{s}_i^T \mathbf{x} - 2y_i b = \lambda + \|\mathbf{s}_i\|^2 - y_i^2.$$

*Ratkaisu ei ole sama kuin iteratiivisella menetelmällä saatu, menetelmät minimoivat hieman eri funktioita.

Kootaan kaikki yhtälöt lineaarisiksi systeemiksi ja ratkaistaan se \mathbf{x} :n ja b :n suhteen pienimmän neliösumman mielessä:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2\mathbf{s}_1^T & -2y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 2\mathbf{s}_n^T & -2y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1\|^2 - y_1^2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{s}_n\|^2 - y_n^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ b \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2\mathbf{s}_1^T & -2y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 2\mathbf{s}_n^T & -2y_n \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{p}} \lambda + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\mathbf{s}_1^T & -2y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 2\mathbf{s}_n^T & -2y_n \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1\|^2 - y_1^2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{s}_n\|^2 - y_n^2 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{q}} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ b \end{bmatrix} &= \mathbf{p}\lambda + \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ f \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

jossa $A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$ ja vektorit \mathbf{p} ja \mathbf{q} voidaan laskea tunnetuista suureista. Alkuperäinen yhtälöryhmä siis toteutuu (pienimmän neliösumman mielessä) jos ja vain jos

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{d}\lambda + \mathbf{e} \\ b &= f\lambda + g. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sijoitetaan nämä takaisin λ :n määritelmään:

$$\lambda = \|\mathbf{x}\|^2 - b^2 = \|\mathbf{d}\lambda + \mathbf{e}\|^2 - (f\lambda + g)^2,$$

kerrotaan neliötermit auki ja sievennetään muotoon

$$(\|\mathbf{d}\|^2 - f^2)\lambda^2 + (2\mathbf{d}^T \mathbf{e} - 2fg - 1)\lambda + \|\mathbf{e}\|^2 - g^2 = 0$$

joka on toisen asteen yhtälö λ :n suhteen ja kaikki muut termit ovat tunnettuja. Ratkaistaan juuret ja lasketaan vastaavat \mathbf{x} ja b sijoittamalla juuret kaavaan (2.2). Vaikka käypiä ratkaisuehdokkaita joskus saadaan kaksi, GPS:n satelliittigeometria on sellainen että toinen ratkaisusta on ulkoavaruudessa ja voidaan rajata pois.*

2.3 Iteratiivinen pienin neliösumma

Kirjoitetaan mittausyhtälöryhmä (2.1) uudelleen *residuaalin* avulla:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}.$$

Residuaali kuvaa yhteensopimattomuutta mittausten ja oletetun paikan \mathbf{x} välillä, ja jos mittaukset ovat virheettömiä se menee nolnaan todellisessa paikassa (mutta mahdollisesti myös muissa pisteissä). Pienimmän neliösumman menetelmän ideana on määrittää paikkaestimaatti $\hat{\mathbf{x}}$ joka minimoi lausekkeen $\|\mathbf{p}(\mathbf{x})\|^2$ eli $\mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{p}(\mathbf{x})$ eli $\sum p_i(\mathbf{x})^2$.

*Ellei sovellus ole esim. kuuraketin paikannus...

Jos mittausvirheitä ei ole, residuaali menee nolnaan todellisessa paikassa $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{p}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

jolloin residuaalin normin minimoinnin sijaan voitaisiin sama(t) ratkaisu(t) löytää myös ratkaisemalla mittausyhtälöryhmä suoraan (ks. kappale 2.2). Tavallisesti mittauksissa on aina virhettä, jolloin residuaalilla ei välttämättä ole lainkaan nollakohtia, ja paikkaestimaatti saadaan ratkaisemalla minimointitehtävä:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{p}(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Epälineaarinen optimointi on vaativa ongelma eikä sille tunneta yleispätevää ratkaisukeinoa.

Jos minimoitava funktio on hyvänlaatuinen ja käytössä on alkuarvaus ”riittävän” läheltä minimiä, voidaan käyttää iteratiivista optimointimenetelmää, joissa ajatuksena on aloittaa alkuarvauksesta \mathbf{x}_0 ja laskea siitä lähtien askeleet $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$, jne, kunnes ratkaisu ei enää muutu. Gauss-Newtonin menetelmässä [11, kappale 4.2.1], [14, s.93], [23, kappale 9.6] (jota paikannusyhteydessä yleensä nimitetään iteratiiviseksi pienimmän neliösumman menetelmäksi) residuaali *linearisoidaan* pisteen \mathbf{x}_k ympäristössä käyttämällä ensimmäisen asteen Taylorin kaavaa $\mathbf{p}(\mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{p}'(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k$ ja koitetaan löytää sellainen askel $\Delta\mathbf{x}_k$, että linearisoitu residuaali menee nolnaan:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{p}'(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Merkitään residuaalin derivaattaa eli *Jacobin matriisia* $\mathbf{J}_k = \mathbf{p}'(\mathbf{x}_k) = \mathbf{h}'(\mathbf{x}_k)$ ja järjestetään yhtälö muotoon

$$\mathbf{J}_k \Delta\mathbf{x}_k = -\mathbf{p}(\mathbf{x}_k),$$

jonka pienimmän neliösumman ratkaisu (1.6) on

$$\Delta\mathbf{x}_k = -(\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{p}(\mathbf{x}_k).$$

Iteraatioaskeleeksi saadaan täten

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{p}(\mathbf{x}_k). \quad (2.4)$$

Algoritmin toteutusta varten tarvitaan alkuarvaus \mathbf{x}_0 , josta lähtien iteraatiota toistetaan kunnes ratkaisu on supennut johonkin pisteeseen $\hat{\mathbf{x}}$ (tai maksimi-iteraatiomäärä tulee täyteen). Voidaan todistaa että iteraatio supenee jos alkupiste on ”riittävän lähellä” minimiä ja residuaalin toinen derivaatta on ”riittävän pieni” [14]. Esimerkiksi satelliittipaikannuksessa maapallon keskipiste toimii paremman tiedon puutteessa alkuarvauksena koska mittausyhtälöt ovat lähes lineaarisia.

Jos jotkut mittaukset ovat tarkempia kuin toiset, voidaan algoritmia vielä parantaa ottamalla mukaan painomatriisi joka pakottaa hyvälaatuiset mittausyhtälöt toteutumaan tarkemmin kuin huonompilaatuiset. Kun painomatriisina käytetään mittauskovarianssimatriisin inverssiä ja ratkaistaan siis tehtävä

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \Sigma^{-1} \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

saadaan minimivarianssiestimaatti (todistus esim. [18, luku 6.A.1], tai epäsuorasti maksimiuskottavuuden avulla jäljempänä).

Algoritmi 1 Gauss-Newtonin menetelmä (Iterative Least Squares)

1. Valitse alkuarvaus \mathbf{x}_0 ja lopetustoleranssi δ . Aseta $k = 0$.
 2. Laske $\mathbf{J}_k = \mathbf{h}'(\mathbf{x}_k)$.
 3. Askel: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k$, jossa $\Delta\mathbf{x}_k = -\mathbf{J}_k \backslash (\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y})$
 4. Jos lopetusehto $\|\Delta\mathbf{x}_k\| < \delta$ ei toteudu, kasvata k :ta ja toista kohdasta 2.
-

Algoritmi 2 Painotettu Gauss-Newtonin menetelmä (Iterative Weighted Least Squares)

1. Valitse alkuarvaus \mathbf{x}_0 ja lopetustoleranssi δ . Lisäksi tarvitaan mittauskovarianssimatriisi $\Sigma = \text{cov}(\mathbf{v})$. Aseta $k = 0$.
 2. Laske $\mathbf{J}_k = \mathbf{h}'(\mathbf{x}_k)$
 3. Askel: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k$, jossa $\Delta\mathbf{x}_k = -(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}_k) \backslash (\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}))$
 4. Jos lopetusehto $\|\Delta\mathbf{x}_k\| < \delta$ ei toteudu, kasvata k :ta ja toista kohdasta 2.
-

Esimerkki 16 (Jacobin matriisin laskenta). *Olkoon meillä etäisyysmittaukset kolmeen asemaan paikoissa \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 ja \mathbf{s}_3 . Nyt mittausyhtälöryhmä on*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{x}\| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Newtonin algoritmista tarvittava Jacobin matriisi on siis

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{x}\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{x}\| \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{x}\| \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{x}\| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{x})^T}{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{x}\|} \\ -\frac{(\mathbf{s}_2 - \mathbf{x})^T}{\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{x}\|} \\ -\frac{(\mathbf{s}_3 - \mathbf{x})^T}{\|\mathbf{s}_3 - \mathbf{x}\|} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eli oletetusta paikasta \mathbf{x} kohti asemia osoittavat yksikkövektorit pinottuna matriisiksi.

2.3.1 Virheanalyysistä

Itse paikka- tai tilaestimaatin lisäksi meitä kiinnostaa ratkaisun virhearvio. Mittauksissa on aina kohinaa, joten paikkaestimaatin laskemisen jälkeen olennainen kysymys on kuinka lähellä todellista paikkaa estimaatin voidaan luvata olevan.

Virheitä voidaan luokitella eri tavoilla, mutta teoreettisen tarkastelun kannalta kiinnostava jako on *mallinnettuihin* ja *mallintamattomiin virheisiin*. Mallinnetut virheet ovat niitä joita etukäteen odotammekin systeemissä olevan, eli useimmiten mittauskohina, jonka systeemin mittausgeometria etukäteen ennustettavissa olevalla tavalla muuntaa paikkaestimaatin kohinaksi. Eräät menetelmät jopa eivät toimi kunnolla jos mittauksissa ei olekaan kohinaa.

Mallintamattomia virheitä ovat mm.:

- mallinnusvirheet: väärät oletukset/arvaukset mittauskohinan jakaumasta tai riippuvuuksista, mittausresoluutio tai havaitsemiskynnys, epätarkat luonnonvakioiden arvot, ...
- numeeriset virheet: johtuvat äärellisestä laskentatarkkuudesta (ja joskus varomattomasta ohjelmoinnista)
- approksimaatio-, katkaisu- ja näytteistysvirheet: algoritmin tahallista ”optimointia”
- muut: ympäristötekijät, laitteiston väärinkäyttö, koodausbugit, ...

Tässä luvussa käsitellään vain mallinnettuja virheitä, jolloin saadut virherajat ja -arviot tiukasti ottaen pitävät paikkansa vain jos muun tyyppisiä virheitä ei ole, eli kaikki mallit ovat oikein ja laskut tehdään äärettömällä tarkuudella. Käytännössä täten laskettuja virherajoja joudutaan tulkitsemaan varovasti: ”jos malli olisi oikein, niin...”.

Estimaatin virhettä voidaan (algoritmia ohjelmoimatta) tutkia eri tavoin:

- Virhepropagaatio: kun mittausvirheiden (=syötteen) jakauma/kovarianssi tunnetaan, laske ratkaisun (=tulosten) jakauma/kovarianssi
- Luotettavuusalueet: laske todennäköisyys että oikea paikka on annetun alueen sisällä, tai laske alue jonka sisällä paikka on esim. 95% todennäköisyydellä
- Herkkyysanalyysi (*perturbation analysis*): paljonko pienet muutokset mittauksissa muuttavat ratkaisua. Jos mittauksille \mathbf{y} saadaan estimaatti $\hat{\mathbf{x}}$, paljonko estimaatti muuttuu jos mittaus onkin $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}$, jossa muutos $\Delta\mathbf{y}$ oletetaan suhteellisen pieneksi?

2.3.2 Painottamattoman pienimmän neliösumman virheanalyysi

Olkoon $\bar{\mathbf{x}}$ todellinen paikka, $\bar{\mathbf{y}}$ virheettömät mittaukset ja mittausvirhe \mathbf{v} . Merkitään pienimmän neliösumman ratkaisua $\hat{\mathbf{x}}$ ja sen virhettä \mathbf{u} , eli $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}$. Jos pienimmän neliösumman menetelmä on supennut tähän ratkaisuun, se tarkoittaa että iteraatioaskeleen (2.4) pituus tässä pisteessä on nolla, eli:

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{v})) = \mathbf{0}.$$

(Derivaattamatriisi \mathbf{J} on toki \mathbf{x} :n funktio, mutta jos \mathbf{u} oletetaan pieneksi, niin \mathbf{J} on lähes vakio tarkasteltavalla alueella ja sen riippuvuus \mathbf{x} :stä voidaan unohtaa.) Linearisoidaan vielä mittausyhtälöt: $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}\mathbf{u}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T (\underbrace{\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}})}_{=\bar{\mathbf{y}}} + \mathbf{J}\mathbf{u} - (\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{v})) &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{J}\mathbf{u} - (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Jos mittausvirhe on normaalijakautunut, $\mathbf{v} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$, seuraa Lauseen 4 (s. 10) perusteella että

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \Sigma \mathbf{J} (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}). \quad (2.6)$$

Erikoistapauksessa jossa mittausvirheet ovat jakautuneet riippumattomasti ja identtisesti, eli $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$, paikan virhe sievenee muotoon $\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1})$. Nyt mittausvirheistä johtuvan estimointivirheen kovarianssi koostuu kauniisti mittausvirheiden varianssin σ^2 ja mittausgeometriasta riippuvan matriisin $(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$ tulosta. GPS-yhteydessä matriisista käytetään nimeä DOP matrix (Dilution of Precision) [18, kappaleet 6.A.1–2], josta voidaan laskea erilaisia DOP-lukuja seuraavasti:

$$\begin{aligned} \text{Global/Geometric Dilution of Precision: } GDOP &= \sqrt{\text{tr}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}} \\ \text{Position Dilution of Precision: } PDOP &= \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}]_{(1:3,1:3)}} \\ \text{Horizontal Dilution of Precision: } HDOP &= \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}]_{(1:2,1:2)}} \\ \text{Vertical Dilution of Precision: } VDOP &= \sqrt{[(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}]_{(3,3)}} \\ \text{Time Dilution of Precision: } TDOP &= \sqrt{[(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}]_{(4,4)}} \end{aligned}$$

DOP-lukujen hyöty on siinä että satelliittigeometrian ”hyvyys” saadaan tiivistettyä yhteen lukuun, jonka jälkeen paikkavirheen hajontaa voidaan arvioida yksinkertaisesti kertomalla mittausvirheen hajonta DOP-luvulla. Jos mittauksilla on eri hajonnat, virhekaava (2.6) ei sievene DOP-muotoon, ks. tehtävä 2.5.

Painotettakoon vielä että kaavan (2.6) johdossa virhe \mathbf{u} oletettiin pieneksi jotta mittausfunktio $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ pystyttiin linearisoimaan estimaatin ympäristössä. Mitä suuremmat epälinearisuudet mittausyhtälöissä on, eli mitä ”kaarevampia” niiden määrittelemät pinnat ovat, sitä huonompi arvio paikan virheelle tällä tavalla saadaan. (ks. tehtävä 2.17)

Huomioita:

1. Painotettu pienimmän neliösumman menetelmä antaa varianssimieleessä optimaalisia tuloksia kunhan mittauskovarianssi tiedetään, tai toisin päin ajateltuna, jos mittaukset noudattavat niille oletettua jakaumaa. Pienimmän neliösumman kriteeri on herkkä suurille mittausvirheille, ”roskamittauksille”, joten ne tulisi havaita ja poistaa.

2. Jos mittausyhtälö on kovin epälineaarinen, Gauss-Newtonin menetelmä voi käyttäytyä huonosti ja jokin muu vapaa optimointimenetelmä kuten gradienttihaku tai Levenberg-Marquardt voi olla parempi. Jos mittausyhtälöissä on epäjatkuvuuskohtia, joudutaan ne yleensä joko muuttamaan jatkuviksi tai käyttämään jotain Monte Carlo -algoritmia. [23]
3. Mittausmalliin voidaan ottaa yhtälöiden lisäksi myös epäyhtälömuotoisia rajoitteita (esim. soluverkon sektoriraja), mutta silloin tehtävä muuttuu sidotuksi minimointitehtäväksi joka on kertaluokkaa vaikeampi ratkaista.

2.4 Uskottavuuden maksimointi

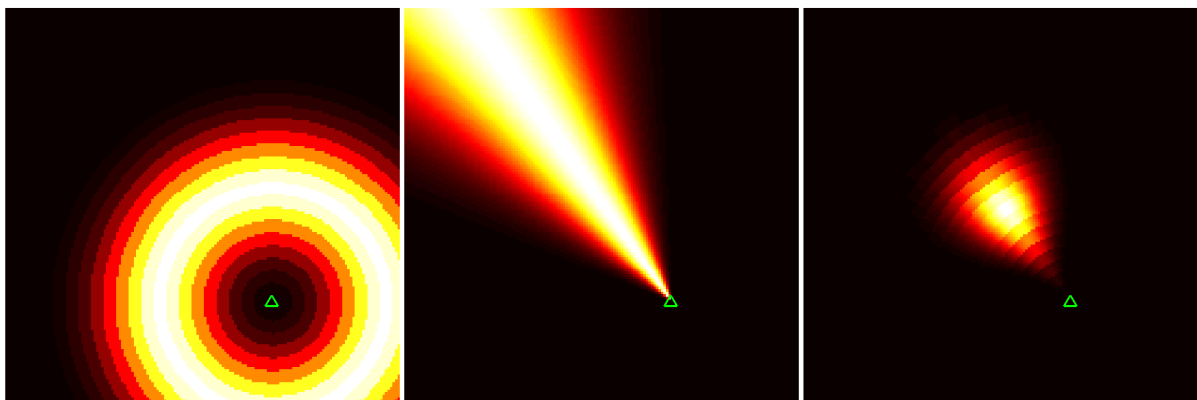
Mittausyhtälöä yleisempi esitys mittausmallille on ehdollinen todennäköisyysfunktio $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$, joka voidaan lukea ”todennäköisyys että mitataan \mathbf{y} jos ollaan paikassa \mathbf{x} ” (ks. kappale 1.3.3). Kun lausekkeessa \mathbf{x} pidetään muuttujana ja mittauksia \mathbf{y} vakiona, funktiota nimitetään *uskottavuusfunktioiksi* (likelihood) ja tulkitaan sitä niin että mitä suurempia arvoja uskottavuusfunktio saa mittauksilla \mathbf{y} ja paikassa \mathbf{x} , sitä paremmin kyseinen paikka ”sopii” mittauksiin. Uskottavuusfunktioita merkitään joskus $L(\mathbf{x}|\mathbf{y})$. Riippumattomien mittausten yhteinen uskottavuus saadaan kertomalla yksittäisten mittausten uskottavuusfunktioit keskenään.

Jos mittausmalli on annettu yhtälömuodossa $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$, se on helppo kirjoittaa uskottavuusmuotoon sillä $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})$ ja \mathbf{v} :n jakauma tunnetaan, joten

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = p_{\mathbf{v}}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})),$$

jossa $p_{\mathbf{v}}$ on tunnettu virheen jakauma. Uskottavuusfunktion avulla annettun mittausmallin muuttaminen mittausyhtälöiksi sen sijaan onnistuu vain erikoistapauksissa. Uskottavuuden maksimointi (maximum likelihood) on siis menetelmän yleiskäyttöisempi kuin aiemmin esitetyt.

Kun mittausmalli uskottavuusmuodossa tiedetään ja saadaan mittaus, ratkaisu $\hat{\mathbf{x}}$ haetaan siten että sen uskottavuus mittausten valossa on mahdollisimman suuri: $\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Tähän voidaan käyttää epälineaarisen optimoinnin keinoja, esimerkiksi Newtonin menetelmää. Jos



Kuva 2.2: Esimerkkejä mittausten uskottavuusfunktioista. 1) etäisyys tukiasemasta, 2) suuntakulma tukiasemaan, 3) etäisyys ja kulma yhdessä (edellisten tulo)

mittauksia on vähän, uskottavuusfunktiolla ei välttämättä ole yksikäsitteistä maksimia (esimerkiksi kuvan 2.2 vasen tai keskimäinen tilanne).

Esimerkki 17. Tutkitaan n mittauksen ryhmää

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$$

jossa virhe \mathbf{v} jakautunut normaalijakauman mukaisesti, $\mathbf{v} \sim \mathbf{N}(0, \Sigma)$. Moniulotteisen normaalijakauman tiheysfunktio on $p_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) = C \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T \Sigma^{-1} \mathbf{z}\right)$, vakio $C = (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2}$ ei ole tässä oleellinen.

Nyt uskottavuusfunktio on

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = p_{\mathbf{v}}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})) = C \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))\right).$$

Koska kovarianssimatriisi Σ on positiividefiniitti, eksponenttifunktion argumentti on aina ei-positiivinen. Täten suurimman uskottavuuden ratkaisu löydetään minimoimalla lauseketta $(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}))$, joka on täsmälleen sama kuin painotetun pienimmän neliösumman kohdefunktio painomatriisilla Σ^{-1} .

Normaalijakautuneille virheille siis maksimiuskottavuus ja painotettu pienimmän neliösumman menetelmä (2.5) ovat identtiset, ja tämä johto on yksi perustelu sille miksi painomatriisina käytetään nimenomaan mittauskovarianssimatriisin inverssiä.

2.5 Bayesilainen ratkaisu

Edellä käsitellyllä mittauksen uskottavuusfunktiolla $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ ei sinänsä ole mitään konkreettista tulkintaa, kiinnostavampi suure olisi tilan/paikan todennäköisyys ehdollistettuna saaduilla mittauksilla $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$. Tämä voidaan laskea Bayesin kaavalla:

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{\int p(\mathbf{x})p(\mathbf{y} | \mathbf{x})d\mathbf{x}} \quad (2.7)$$

jossa $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ on mittausmallin uskottavuusfunktio ja $p(\mathbf{x})$ on mittauksista riippumaton *prioritieto* joka antaa tiheysfunktion muodossa ”valistuneen arvauksen” \mathbf{x} :n mahdollisista arvoista. Kun saatu mittaus \mathbf{y} sijoitetaan kaavaan, vastauksena saadaan *posteriorijakauma* eli ehdollinen todennäköisyysjakauma tilalle \mathbf{x} .

Bayesin kaava antaa todennäköisyysjakauman $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ joka on informatiivisempi kuin pelkkä tilaestimaatti $\hat{\mathbf{x}}$ – jakauma sisältää kaiken tiedon jota tilasta prioritiedon ja mittauksen perusteella on. Jakaumasta voidaan tarpeen mukaan laskea odotusarvo tai suurimman uskottavuuden estimaatti, kovarianssiestimaatti, luottamusvälejä, jne. ja sitä voidaan käyttää prioritietona seuraavan ajanhetken paikkaratkaisulle.

Jos käsiteltävät tiheydet ovat vähänkään monimutkaisempia, posterioritiheyttä ei yleensä pysty ratkaisemaan analyttisesti, vaan turvaututaan johonkin approksimaatioon tai Monte Carlo -integroiintiin joka toimii mielivaltaisille funktioille. Tästä enemmän luvussa 3.5.

Esimerkki 18. Tutkitaan yksiulotteista tehtävää, jossa mitataan tukoksen paikkaa 10 metrin pituisessa putkessa. Olkoon mittausvirheen jakauma $N(0, (3m)^2)$.

Uskottavuusfunktio on nyt normaalijakauman tiheysfunktio (vakiokerroin ei ole olennainen)

$$p(y | x) = C \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2 \cdot 3^2}\right)$$

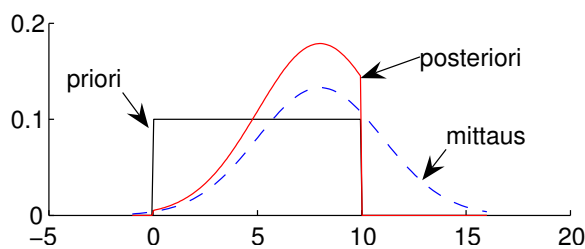
ja priorina käytetään paremman tiedon puutteessa tasajakaumaa putken sisällä:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{jos } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Jos mittaustulokseksi saadaan vaikkapa $y = 8$ metriä, saadaan Bayesin kaavasta (2.7)

$$\begin{aligned} p(x | y) &= \frac{p(x)p(8 | x)}{\int p(x)p(8 | x)dx} = \frac{p(x)C \exp\left(-\frac{(x-8)^2}{2 \cdot 3^2}\right)}{\int p(x)C \exp\left(-\frac{(x-8)^2}{2 \cdot 3^2}\right) dx} \\ &= \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{(x-8)^2}{18}\right)}{\int_0^{10} \exp\left(-\frac{(x-8)^2}{18}\right) dx} & \text{jos } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.1788 \exp\left(-\frac{(x-8)^2}{18}\right) & \text{jos } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases} \end{aligned}$$

Prioritietoa käytettiin tässä vain rajoittamaan estimaatti sallitulle alueelle. Jos esineen summittainen paikka putkessa olisi ollut tiedossa, sitä olisi voinut käyttää myös priorina.



Kuva 2.3: Posteriori on priorin ja mittauksen uskottavuuden normalisoitu tulo.

Saatu posteriorijakauma $p(x|y)$ kuvaa nyt parhaan tietomme mukaan esineen sijaintitodennäköisyyttä putken eri kohdissa. Jakaumalle voidaan tavalliseen tapaan laskea odotusarvo $\mu = \int xp(x|y)dx \approx 6.76$ ja varianssi $\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 p(x|y)dx \approx 2.12^2$. Mittaus $y = 8$ siis siirsi prioriestimaattia $x = 5$ hieman kohti putken oikeaa päätä.

Jos tämän jälkeen tehtäisiin vielä uusia riippumattomia mittauksia (ja oletetaan ettei paikannettava esine liiku välillä), voidaan tästä ratkaistua posterioria käyttäen uutena priorina ja kaikista mittauksista saatu informaatio tulee käytettyä optimaalisesti.

2.5.1 Bayesilainen virheanalyysi

Aiemmin mainittiin että Bayesin ratkaisu tuottaa paikan todennäköisyystiheysfunktion, josta voidaan laskea sekä paikkaestimaatti että sen keskineliövirheen odotusarvo

$$MSE = \int (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

jossa integraali yleensä lasketaan numeerisesti [20]. Jos estimaattina $\hat{\mathbf{x}}$ on odotusarvo $E(\mathbf{x} | \mathbf{y})$, keskineliövirhe on määritelmän mukaan sama kuin posteriorikovarianssi.

Esimerkki 19. *Esimerkissä 17 havaittiin pienimmän neliösumman menetelmän ja maksimiuskottavuusmenetelmän yhtymäkohtia. Todetaan vielä että normaalijakautuneille mittauksille Bayesilainen virhekovarianssi on (liki pitäen) sama kuin pienimmän neliösumman menetelmällä virhetarkastelussa saatu. Olkoon mittausvirheiden jakauma $\mathbf{v} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, ja priori $p(\mathbf{x})$ vakio koko avaruudessa*. Nyt uskottavuusfunktio on*

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = C_1 \exp\left(-\frac{(\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})^T (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})}{2\sigma^2}\right)$$

joten

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) &= \frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{\int p(\mathbf{x})p(\mathbf{y} | \mathbf{x})d\mathbf{x}} = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{\int p(\mathbf{y} | \mathbf{x})d\mathbf{x}} \\ &= \frac{C_1 \exp\left(-\frac{(\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})^T (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})}{2\sigma^2}\right)}{\int C_1 \exp\left(-\frac{(\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})^T (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})}{2\sigma^2}\right) d\mathbf{x}} \\ &= C_2 \exp\left(-\frac{(\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})^T (\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{y})}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Tehdään samanlainen linearisointi tosipaikan ympärillä kuin pienimmän neliösumman analyysissä: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{y} - \Delta\mathbf{y} + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x}$, jolloin saadaan

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \approx C_2 \exp\left(-\frac{(\mathbf{J}\Delta\mathbf{x} - \Delta\mathbf{y})^T (\mathbf{J}\Delta\mathbf{x} - \Delta\mathbf{y})}{2\sigma^2}\right),$$

joka, toisin kuin (2.6), riippuu realisoituneesta mittausvirheestä $\Delta\mathbf{y}$ eikä ainoastaan sen jakaumasta. Vertailun vuoksi kokeillaan sijoittaa $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ sillä perusteella että mittausvirheet ovat nollakeskeisiä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x} | \mathbf{y})|_{\Delta\mathbf{y}=\mathbf{0}} &\approx C_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta\mathbf{x}}{\sigma^2}\right) \\ &= C_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \Delta\mathbf{x}^T [\sigma^2 (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}]^{-1} \Delta\mathbf{x}\right) \end{aligned}$$

joka on tiheysfunktio jakaumalle $\Delta\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1})$ eli sama tulos joka saatiin edellisessä kappaleessa pienimmän neliösumman menetelmälle samoin oletuksin (ks. sivu 29). Toteutuneesta mittausvirheestä $\Delta\mathbf{y}$ riippuen Bayesin estimaatin jakauma vaihtelee tämän ympärillä.

*Usein ajatellaan että priori on tasan jakautunut eli sen tiheys on vakio koko avaruudessa, mikä aiheuttaa ristiriidan koska tiheysfunktion integraalin pitäisi olla 1. Käytännössä tasan jakautunut priori supistuu laskuista pois, ja periaatteessa voidaan ajatella että käytettiin prioria joka on tasan jakautunut ”riittävän” suuressa alueessa jonka ulkopuolelle jää niin vähän todennäköisyysmassaa ettei se vaikuta tuloksiin. Toinen saman lopputuloksen tuottava vaihtoehto on olettaa että priori on jakautunut $N(0, M\mathbf{I})$ mukaan ja ottaa raja-arvo kun $M \rightarrow \infty$.

2.6 Luottamusvälit

Luottamusvälillä tarkoitetaan yksiuolotteisessa tapauksessa väliä jonka sisällä estimaatti on esim. 99% todennäköisyydellä.* Luottamusväli on yleensä keskitetty estimaatin ympärille, mutta voi toki olla asetettu myös epäsymmetrisesti. Moniuolotteisessa tapauksessa käytetään yleensä estimaattiin keskitettyjä luottamuspalloja tai ellipsoideja, mutta jälleen mikään ei estä käyttämästä minkä muotoista aluetta tahansa, kunhan sen sisälle jää haluttu osa estimaatin jakaumasta.

Jos estimaatin jakauma on tiedossa, luottamusväli (tai kääntäen tietyn välin sisään jäävä todennäköisyys) lasketaan integroimalla jakaumaa halutun välin yli:

$$P(a \leq x \leq b | y) = \int_a^b p(x | y) dx.$$

Normaalijakauman tapauksessa voidaan käyttää suoraan normaalijakauman kertymäfunktiota ja sen käänteisfunktiota ja saadaan tutut nyrkkisäännöt $\pm 2\sigma$ sisällä on 95% todennäköisyydestä, $\pm 3\sigma$ sisällä 99.7% jne.

Tosielämässä mittausten jakaumaa ei tunneta, jolloin estimaatinkaan jakauma ei ole tiedossa. Sen varianssi voidaan kuitenkin yleensä approksimoida. Normaalijakaumasta johdetut luottamusvälit eivät enää pidä paikkaansa, mutta vastaavia luottamusvälejä saadaan Chebyshevin epäyhtälöstä, joka antaa alarajan sille kuinka paljon todennäköisyysmassaa tietyn välin ulkopuolella voi pahimmillaan olla, kun jakauman varianssi on σ^2 :

$$P(|x - \hat{x}| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.8)$$

Kaavan perusteella esimerkiksi yli kolmen sigman päässä keskiarvosta voi olla korkeintaan 1/9 todennäköisyydestä, mikä tarkoittaa että oli jakauma mikä tahansa, välillä $\hat{x} \pm 3\sigma$ on aina vähintään 8/9 $\approx 89\%$ todennäköisyydestä.

Vastaava n -ulotteinen kaava on

$$P\left(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \geq \lambda\sqrt{\text{trace}(\Sigma)}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

jossa Σ on jakauman kovarianssimatriisi. Jos muuttujilla on suuria korrelaatiota tai eri suuruusluokkaa olevat varianssit, vähemmän sievennetty kaava

$$P\left(\sqrt{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})} \geq \lambda\sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.9)$$

*Tämä on Bayesilainen tulkinta jota paikannuslaskuissa käytämme häikäilemättä. Pohjimmiltaan kyse on siitä miten satunnaisuus pitäisi mallintaa matemaattisesti. Frekventistisen tulkinnan mukaan todennäköisyys tarkoittaa sitä, että jos koe toistetaan "monta" kertaa, niin todennäköisyyden mukainen osuus tapahtumista tapahtuu. Bayesiläisessä tulkinnassa todennäköisyys on pikemminkin subjektiivinen epävarmuuden mitta, joka kertoo paljonko tietoa (tai arvauksia) systeemistä on.

Katsantojen ero näkyy mm. luottamusvälin tulkinnassa. Frekventistisessä mielessä 99% luottamusväli tarkoittaa sitä, että todellinen paikka on jokin kiinteä arvo ja 99% tapauksista luottamusväli saadaan laskettua niin että todellinen paikka osuu sen sisälle. Bayesilainen tulkinta vastaa paremmin intuitiota: todellinen paikka on satunnainen ja osuu 99% todennäköisyydellä laskemamme luottamusvälin sisälle.

antaa tiukemman rajan.

Kaavan (2.9) avulla voidaan myös määrittää luottamusellipsoidin yhtälö, esimerkiksi 95% ellipsoidi saadaan valitsemalla yhtälön oikealle puolelle $1/\lambda^2 = 0.05$ (eli korkeintaan 5% todennäköisyydestä saa olla ellipsoidin ulkopuolella), josta seuraa $\lambda = \sqrt{1/0.05}$. Siis ellipsoidi

$$E_{95\%} = \left\{ \mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) < \frac{n}{0.05} \right\}$$

sisältää vähintään 95% todennäköisyysmassasta (vrt. tehtävä 1.10 sivulla 20).

Yhteenveto ja huomioita

- Paikannustehtävä voidaan muotoilla joko epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemiseksi tai maksimiuskottavuuden/Bayesilaisen posteriorin hakemiseksi. Kumpikin tehtävä ratkeaa joko standardeilla optimointimenetelmillä tai numeerisella integroinnilla [20], johon palataan luvussa 3.5.
- Jos mittausyhtälöt ovat lähes lineaarisia niin että $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}'(\mathbf{x})$ on lähes vakio ratkaisun lähellä (jolloin sitä voidaan merkitä pelkästään \mathbf{J}) ja mittausvirheet ovat normaalijakautuneita tai ne voidaan hyvällä omallatunnolla siten mallintaa, pienimmän neliösumman ratkaisu ja Bayesilainen ratkaisu ovat asymptoottisesti samat.
- Suljetun muodon ratkaisut ovat työläämpiä johtaa, ja yleensä herkempiä mittausvirheille. Ne ovat kuitenkin joskus hyödyllisiä alkuarvauksen tai tehtävän kaikkien ratkaisujen etsimiseen.

Harjoitustehtäviä

- 2.1. Tuntemattomana on kaksiulotteinen paikka $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$. Kirjoita mittausmalli, kun mittaus y on
 - (a) kohinainen arvio koordinaatista x_2
 - (b) kohinainen etäisyys kiinteään asemaan $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2]^T$
 - (c) kohinainen suuntakulma asemasta \mathbf{s} siten että 0-kulma osoittaa pohjoiseen ja kulma kasvaa myötäpäivään
 - (d) asemiin \mathbf{s}^1 ja \mathbf{s}^2 mitattujen kohinaisten etäisyyksien erotus
- 2.2. Ideaalinen INS antaisi mittauksena kohinaisen nopeusvektorin \mathbf{v} B-koordinaatistossa sekä pyörähdysvektorin \mathbf{p} joka määrittelee B-koordinaatiston asennon lokaalin L-koordinaatiston suhteen. Kirjoita mittausyhtälö nopeusvektorille \mathbf{v} kun \mathbf{p} oletetaan virheettömäksi.

2.3. Tuntemattomana on kaksiulotteinen paikka \mathbf{x} . Mittausmalli on

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \|[100 \ 0]^T - \mathbf{x}\| \\ \|[0 \ 50]^T - \mathbf{x}\| \end{bmatrix} + \mathbf{v}, \quad \text{jossa } \mathbf{v} \sim N(0, 10^2 I)$$

(a) Kirjoita residuaalin $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ja sen derivaattamatriisin $\mathbf{J} = \mathbf{p}'(\mathbf{x})$ kaavat.

(b) Saadaan mittaus $\mathbf{y} = [108 \ 46]^T$. Mikä on Newtonin menetelmän ensimmäinen askel jos alkupaikkana on $\mathbf{x} = [0 \ 0]^T$.

2.4. Johda painotetun Gauss-Newtonin menetelmän (Algoritmi 2) iteraatioaskel, eli näytä että se minimoi lausekkeen $\mathbf{p}(\mathbf{x})^T \Sigma^{-1} \mathbf{p}(\mathbf{x})$.

2.5. Johda paikkavirheen jakauma painotetulle Gauss-Newtonin menetelmälle (Algoritmi 2) samaan tapaan kuin kappaleessa 2.3.2 kun painomatriisi on W ja mittausten kovarianssimatriisi on Σ .

2.6. Tutka mittaa etäisyyttä kohteeseen sekä etäisyyden muutosta. Tutka-antenni on asennettu pyörivän varren päähän niin että sen paikka ajanhetkellä t on $\mathbf{s}(t) = [\cos t \ \sin t]^T$. Kirjoita mittaussyhtälöryhmä ja sen derivaattamatriisi hetkellä t kun tilavektorissa on kohteen 2D-paikka ja nopeus: $\mathbf{x} = [r_1 \ r_2 \ v_1 \ v_2]^T$. (Huom. tarkkana koska derivoidaan ajan suhteen ja koska tilavektorin suhteen.)

2.7. Olkoon mittausmalli lineaarinen, $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, ja \mathbf{x}_0 annettu vektori. Johda estimaattori $\hat{\mathbf{x}}$ joka minimoi lausekkeen $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|^2$.

2.8. Kehitä suljetun muodon ratkaisu (vrt. esimerkki 15 sivulla 24) yhtälöryhmälle

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{x}\| &= y_1 \\ &\vdots \\ \|\mathbf{s}_n - \mathbf{x}\| &= y_n. \end{aligned}$$

Ratkaise tehtävän 2.3 paikannusongelma saamallasi kaavalla.

2.9. Esim. WLAN-verkoissa ei useinkaan ole mahdollista tai järkevää muuttaa mitattua signaalitehoa etäisyysmittaukseksi. Sen sijaan voidaan käyttää ns. fingerprint-menetelmää, jossa kalibrointivaiheessa valitaan joukko paikkoja \mathbf{p}_i , $i = 1 \dots n$, ja mitataan niissä kaikkien kuuluvien signaalien tehot $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$, ja paikannusvaiheessa verrataan tehtyjä tehomitauksia tietokantaan.

Kirjoita mittausmalli, kun oletetaan että mittauskohina on riippumattomasti normaalijakautunutta varianssilla σ^2 ja oletetaan että tietokantaan on saatu määritettyä mittauksen odotusarvot kussakin kalibrointipisteessä tarkasti. Mieti millaisella algoritmilla kirjoittamasi mittausmallin pystyisi ratkaisemaan. (Mahdollisia ratkaisuja on monta eikä mikään ole ihan suoraviivainen.)

2.10. Kirjoita seuraavia mittausyhtälöitä vastaavat uskottavuusfunktiot $p(y | x)$.

(a) $y = x^2 + v, \quad v \sim \text{Tas}[-1, 1]$

(b) $y = h(x) + v, \quad v \sim \text{Tas}[-1, 1]$

(c) $y = 1$ jos $\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\| \leq 100$, muuten $y = 0$

(d) $y = 1$ jos $\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\| + v \leq 100, \quad v \sim N(0, 1)$, muuten $y = 0$

(e) $y = \|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|^2, \quad \mathbf{s} \sim N(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{I})$

$\text{Tas}[-1, 1]$ tarkoittaa tasajakaumaa ko. välillä. Huom. Kohdissa (c) ja (d) mittaus y on binäärinen, jolloin sen uskottavuusfunktioiksi riittää ilmoittaa $p(0 | x)$ ja $p(1 | x)$.

2.11. Mittausmalli on $y = \text{floor}(x + v)$, jossa $v \sim N(0, (1/2)^2)$.

(a) Mikä on näin saadun mittauksen uskottavuusfunktio? Luonnostele uskottavuusfunktion kuvaaja y :n funktiona jollain kiinteällä x :llä, ja x :n funktiona jollain kiinteällä y :llä.

(b) Mikä on uskottavuusfunktio jos saadaan n riippumatonta mittausta?

(c) (Matlab-lisätehtävä) Tehdään viisi riippumatonta mittausta ja saadaan arvot $0, -2, -1, 0$ ja -1 . Jos lattiafunktio jätettäisiin huomiotta, saataisiin x :n estimaatiksi mittausten keskiarvo -0.8 .

Piirrä uskottavuus sopivalla välillä (esim. $[-2, 1]$) ja arvioi siitä maksimiuskottavuusestimaatti.

2.12. Johda Bayesin kaava (2.7) ehdollisen tiheysfunktion määritelmästä (s. 12).

2.13. Kun sekä priori että uskottavuus ovat yksiulotteisia normaalijakaumia, myös posteriorijakauma on normaalijakauma. Johda sen parametrit.

2.14. Olkoon priorijakauma $p(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{kun } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$.

Mikä on jakauman odotusarvo ja varianssi?

Mittausmalli on $p(y | x) = \begin{cases} (y+1)/2 & \text{kun } x \geq 0 \text{ ja } -1 \leq y \leq 1 \\ (1-y)/2 & \text{kun } x < 0 \text{ ja } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$.

Selvitä itsellesi mitä tämä mittausmalli tarkoittaa, eli miten x :n arvo vaikuttaa mitatun y :n jakaumaan. Laske posteriorijakauma, ja sen perusteella Bayesilainen tilaestimaatti ja sen varianssi.

2.15. Tutkitaan Chebyshevin epäyhtälöä (2.8).

(a) Jos x on jakautunut kaksipuoleisen eksponenttijakauman mukaan, eli $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, sen odotusarvo on 0 ja keskihajonta $\sqrt{2}$. Laske 67% luottamusväli $[-a, a]$ sekä tarkasti, että Chebyshevin epäyhtälöllä.

(b) Millä jakaumalla yhtäsuuruus $P(|x - \hat{x}| \geq \sigma) = 1$ totetuu?

Tietokonetehtäviä

2.16. Jatkoa tehtävään 2.3:

- (a) Ohjelmoi Newtonin menetelmä (Algoritmi 1 sivulla 27), ja aja se alkuarvauksista $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Käytä lopetustoleranssia $\delta = 10^{-3}$. Mihin ratkaisuun päädyttiin ja montako iteraatioaskelta tarvittiin?
- (b) Aja algoritmi uudelleen alkuarvauksesta $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$. Mihin ratkaisuun päädyttiin ja montako iteraatioaskelta tarvittiin?
- (c) Piirrä residuaalin normi alueessa $x \in [-50, 150]$, $y \in [-50, 150]$ Matlabin surf-komennolla. Arvioi kuinka lähellä oikeaa ratkaisua alkuarvauksen täytyisi olla jotta iteraatio löytää oikean ratkaisun.

2.17. Jatkoa edelliseen tehtävään.

Koska kaikilla mittauksilla on sama varianssi σ^2 , saadaan paikkavirheen kovarianssi estimoitua muodossa $\sigma^2(J^T J)^{-1}$.

Olkoon todellinen paikka $\mathbf{x}_{\text{true}} = [0 \ 0]^T$. Paikkaestimaatin jakaumaa voidaan approksimoida numeerisesti simuloiduilla mittauksilla. Nythän $\mathbf{y} \sim N([100 \ 50], \sigma^2 \mathbf{I})$.

- (a) Laske paikkaestimaatti tuhat kertaa eri mittausrealisaatiolla, ja laske saatujen estimaattien kovarianssi ja sen virhe laskettuun kovarianssiestimaattiin $\sigma^2(J^T J)^{-1}$ kun $\sigma = 1$ ja kun $\sigma = 10$.
- (b) Piirrä DOP-arvoja alueessa $x \in [-50, 150]$, $y \in [-50, 150]$ Matlabin surf-komennolla. Voi olla tarpeen leikata liian suuret arvot pois kuvasta, esim. piirtää $\min(\text{DOP}, 10)$.

Luku 3

Suodatus

SIMO ALI-LÖYTTY

Suodatuksessa käytetään nykyisten mittausten lisäksi myös kaikkia aikaisempia mittauksia tilaestimaatin laskennassa. Perusedellytys aikaisempien mittausten käytölle paikannuksessa on *tilamalli*

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (3.1)$$

joka kertoo kuinka seuraava tila riippuu edellisestä tilasta. Termiä *tila* on käytetty paikan sijasta, koska ei haluta rajoittaa tilan muuttujia pelkkään paikkaan. Yhtälössä (3.1) käytetään seuraavia merkintöjä: \mathbf{x}_k on tila, \mathbf{f}_k on tilansiirtofunktio ja \mathbf{w}_k on tilamallin virhe. Alaindeksi k viittaa ajanhetkeen t_k . Tässä kappaleessa paikannettavan tila \mathbf{x} tulkitaan stokastiseksi prosessiksi.

Määritelmä 9 (Stokastinen prosessi). *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja T parametrijoukko. Stokastinen prosessi on sellainen kuvaus $\mathbf{x} : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$, että jokaisella kiinteällä $t \in T$, $\mathbf{x}(\cdot, t)$ on satunnaismuuttuja, jota yleensä merkitään \mathbf{x}_t tai $\mathbf{x}(t)$.*

Koska tila on stokastinen prosessi niin tilaestimaatin laskeminen tapahtuu kaksivaiheisesti. Kullakin ajanhetkellä ratkaistaan tilan ehdollinen jakauma ehdolla mittaukset

$$p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}}(x_k | y_{1:k}).$$

Tässä mittauksilla $y_{1:k}$ tarkoitetaan kaikkia saatavilla olevia mittauksia, sekä nykyisiä että aikaisempia mittauksia. Mittauksetkin tulkitaan satunnaismuuttujien realisaatioiksi. Mittausyhtälöinä toimivat samat yhtälöt kuin staattisessa tapauksessa (2.1)

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (3.2)$$

missä \mathbf{y}_k on mittaukset, \mathbf{h}_k on mittausfunktio ja \mathbf{v}_k mittausvirhe. Ehdollisen jakauman laskemiseen tarvitaan tilamallin ja mittausyhtälöiden lisäksi myös alkutila \mathbf{x}_0 . Kun tilan ehdollinen jakauma on ratkaistu, voidaan siitä laskea toivottu estimaatti, joka on optimaalinen valitun

kriteerin suhteen. Näitä optimaalisia estimaatteja käsitellään kappaleessa 3.4. Samoin voidaan laskea myös muita mielenkiintoisia suureita kuten estimointivirheen kovarianssimatriisi.

Jotta estimointi voitaisiin järkevästi suorittaa kohtuullisessa ajassa täytyy tilan ehdollinen jakauma pystyä ratkaisemaan rekursiivisesti sen sijaan, että käytettäisiin koko mittaushistoriaa joka ajanhetkellä. Tämä onnistuu kun tehdään muutamia riippumattomuusoletuksia. Ensimmäinen oletus on, että virheet \mathbf{w}_k ja \mathbf{v}_k ovat keskenään riippumattomat ja valkoista kohinaa, joka tarkoittaa, että virheet ovat riippumattomia muiden ajanhetkien virheistä. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan myös että virheet ovat nollakeskisiä, tarvittaessa muutetaan tilansiirto- ja mittausfunktioita niin, että virheistä tulee nollakeskisiä. Lisäksi oletetaan, että virheet \mathbf{w}_k ja \mathbf{v}_k ovat riippumattomia alkutilasta \mathbf{x}_0 . Näillä oletuksilla tilan ehdollinen jakauma voidaan ratkaista rekursiivisesti. Asiaa käsitellään tarkemmin kappaleissa 3.2 ja 3.4.

Tilan ehdollisen jakauman ratkaisemista aikasarjassa, jonka avulla voidaan ratkaista haluttu estimaatti, kutsutaan suodatukseksi (*filtering*). Suodatuksella on monia etuja verrattuna staattiseen paikkaratkaisuun. Ensinnäkin suodatuksen avulla voidaan käyttää optimaalisesti kaikki mittaukset hyödyksi riippumatta siitä kuinka monta mittausta minäkin ajanhetkenä saadaan. Tämä parantaa paikannuksen tarkkuutta huomattavasti verrattuna staattiseen paikannukseen. Suodatuksen avulla voidaan hyödyntää helposti myös mahdollista muuta informaatiota paikannuksessa kuten esimerkiksi karttatietoa, tukiasemien sektori/maksimikantamatietoa. Suodatus antaa myös mahdollisuuden tehdä paikannuksesta entistä vikasietoisempi erilaisilla virhemalleilla, joilla voidaan ottaa huomioon vaikka epäsuoraa etenemistä tai muulla tavalla aiheutuneita virheellisiä mittauksia. Lisäksi suodatuksen avulla paikkaratkaisu voidaan myös laskea vaikkei kyseisellä ajanhetkellä ole saatu yhtään mittausta, koska tilamallin avulla voidaan ratkaista tulevan tilan jakauma ilman mittauksia. Toisaalta suodatuksella on myös haittapuolia, ensinnäkin useissa tapauksissa ehdollisen jakauman laskeminen ei ole mahdollista analyttisesti ja vaikka laskenta voidaan tehdä numeerisesti se vie tyypillisesti monta kertaa enemmän laskenta-aikaa kuin staattinen paikannus. Lisäksi suodatuksessa oletetaan, että tiedetään alkutila, tilamalli ja virheiden jakaumat joita staattinen paikannus ei välttämättä tarvitse. Useinkaan nämä eivät ole kovin hyvin tiedossa, jolloin malli ei välttämättä vastaakaan todellisuutta niin hyvin kuin staattisessa tapauksessa.

Kuten edellä todettiin, tilan ehdollista jakaumaa ei voida useinkaan ratkaista analyttisesti. Kuitenkin jos sekä tilamalli että mittausyhtälöt ovat lineaarisia ja jakaumat (virheiden jakaumat ja alkutila) ovat normaaleja niin tilan ehdollinen jakauma voidaan ratkaista jokaisella ajanhetkellä. Algoritmia joka tämän ratkaisee kutsutaan Kalmanin suodattimeksi, joka on nimetty Rudolf E. Kalmanin mukaan [12]. Kuitenkin tämä on vain yksi näkökulma Kalmanin suodattimeen, sillä vaikka jakaumat eivät olisikaan normaaleja niin Kalmanin suodatin toimii siltikin parhaana lineaarisena harhattomana estimaattorina (BLUE, Best Linear Unbiased Estimator). Kalmanin suodatinta käsitellään kappaleessa 3.2, BLU-estimaattorin näkökulmasta ja harjoitustehtävänä 3.7 on näyttää että se ratkaisee myös tilan ehdollisen jakauman. Kalmanin suodattimesta on myös lukuisia approksimaatioita tapauksille, joissa tilamalli ja/tai mittausyhtälöt eivät ole lineaarisia; näitä epälineaarisia Kalmanin suodattimia käsitellään kappaleessa 3.3.

Varsinaista bayeslaista suodatusta, joka ratkaisee yleisen suodatusongelman, käsitellään kappaleessa 3.4. Numeerisia menetelmiä yleisen bayeslaisen ongelman ratkaisemiseksi esitellään kappaleessa 3.5.

3.1 Vakionopeusmalli

Tilamalli, kuten mittausmallikin, on riippuvainen tarkasteltavasta systeemistä. Selvästikin paikallaan olevalle paikannettavalle optimaalinen tilamalli on erilainen kuin väkijoukon seassa poukkoilevalle pyöräilijälle. Tämän vuoksi on kehitelty esimerkiksi interaktiivinen monimallimenetelmä (IMM, interactive multiple model), joka perustuu siihen että suodattimella on useita mittaus/tilamalleja ja suodatin pyrkii ratkaisemaan myös mikä mittaus/tilamalli on oikea [24]. Tätä ongelmaa pyritään ratkaisemaan myös adaptiivisilla suodattimilla kuten aikaisemmin oli puhetta. On hyvä muistaa, että usein joudutaan tyytymään koviinkin yleistyksiin mallien valinnassa, kuitenkin tarkoitus on saada aikaa mahdollisimman hyvin toimivat ja tarpeeksi yksinkertaiset mallit. Tässä kappaleessa esitellään yksi yksinkertainen tilamalli, jota kutsutaan vakionopeusmalliksi.

Vakionopeusmallissa jota on sovellettu satelliittipaikannukseen tilana usein on kolmiulotteinen paikka, kolmiulotteinen nopeus, kellopoikkeama ja sen derivaatta. Tällainen malli on esitetty esimerkiksi kirjoissa [4] [19] [13] [7]. Tässä kuitenkin käsitellään vakionopeusmallia ilman kellopoikkeamaa ja sen derivaattaa. Näiden lisääminen käsittelyyn on kuitenkin suoraviivaista.

Mallinnetaan tila stokastiseksi differentiaaliyhtälöksi

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x}dt + \mathbf{G}d\beta, \quad (3.3)$$

missä

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

Tällöin nopeuden virhe on mallinnettu Brownin liikkeeksi β . Brownin liikkeen β diffuusiomatriisiksi valitaan yksinkertainen diagonaalimatriisi $\mathbf{Q}_c = \sigma_c^2 \mathbf{I}$, missä σ_c^2 kuvaa tilamallin nopeuden virhettä akseleiden suuntaan. Tarkemmin sanottuna σ_c^2 kuvaa sitä, kuinka paljon nopeuden virheeseen tulee lisää varianssia yhden sekunnin aikana pohjois-etelä-, itä-länsi- ja korkeussuunnissa.

Stokastinen differentiaaliyhtälön (3.3) ratkaisu voidaan diskretoida tilamalliksi (katso esim.[17, s.171] tai [8, s.200])

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1},$$

missä

$$\Phi_{k-1} = e^{(t_k - t_{k-1})\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Merkintä $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ tarkoittaa aika-askelen pituutta. Tilamallin virhe \mathbf{w}_k on valkoista, nollakeskistä, normaalijakautunutta kohinaa, joka oletetaan riippumattomaksi alkuehdosta \mathbf{x}_0 . Tilamallin virheen kovarianssimatriisi \mathbf{Q}_k on

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{V}(\mathbf{w}_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, t) \mathbf{G} \mathbf{Q}_c \mathbf{G}^T \Phi(t_k, t)^T dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \Delta t^3 \mathbf{I} & \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{I} \\ \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{I} \end{bmatrix} \sigma_c^2.$$

3.2 Kalmanin suodatin

Kalmanin suodatin ratkaisee suodatusongelman jossa tilamalli ja mittausmalli (mittausyhtälöt) ovat lineaarisia. Tällöin tilamalli on

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (3.4)$$

missä \mathbf{x}_k on prosessin tila, Φ_k on tilansiirtomatriisi ja \mathbf{w}_k on tilamallin virhe, joka oletetaan nollakeskiseksi valkoiseksi kohinaksi ja riippumattomaksi mittauksien virheistä sekä alkutilasta. Tilamallin virheen kovarianssimatriisi merkitään matriisilla \mathbf{Q}_k . Mittausmalli puolestaan on

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (3.5)$$

missä \mathbf{y}_k on mittaukset, \mathbf{H}_k on mittausmatriisi ja \mathbf{v}_k on mittausmallin virhe, joka oletetaan nollakeskiseksi valkoiseksi kohinaksi ja riippumattomaksi tilamallin virheistä sekä alkutilasta. Mittausmallin virheen kovarianssimatriisia merkitään matriisilla \mathbf{R}_k , joka oletetaan positiividefiniitiksi. Tilamallin ja mittausmallin lisäksi Kalmanin suodatin tarvitsee alkutilan \mathbf{x}_0 . Merkitään alkutilan odotusarvoa vektorilla $\hat{\mathbf{x}}_0$ ja kovarianssimatriisia vakiomatriisilla \mathbf{P}_0 , joka oletetaan positiividefiniitiksi. Hattumerkintä viittaa estimaattoriin, joka on mittausten funktio. Tosin tässä tapauksessa estimaattori on vakiosatunnaismuuttuja, koska ajanhetkellä t_0 ei saada yhtään mittausta. Kovarianssimatriisi \mathbf{P}_0 voidaan tulkita myös keskineliövirhematriisiksi (MSE) $\mathbf{E}(\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^T)$, missä $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$.

Kalmanin suodattimen tarkoituksena on ratkaista paras lineaarinen harhaton estimaattori tilalle \mathbf{x}_k . Riippumattomuusoletusten vuoksi tämä voidaan tehdä rekursiivisesti, tällöin estimaattori on muotoa

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k-1} & \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

missä $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ on tilan \mathbf{x}_{k-1} paras lineaarinen harhaton estimaattori ajanhetkellä t_{k-1} , matriisilla \mathbf{P}_{k-1} merkitään vastaavaa keskineliövirhematriisia. Ajanhetken t_k mittauksia merkitään satunnaismuuttujalla \mathbf{y}_k .

Seuraavaksi johdetaan sellaiset matriisit \mathbf{J}_{k-1} ja \mathbf{K}_k , että Kalmanin suodatin olisi paras lineaarinen harhaton estimaattori. Parhaalla tässä tarkoitetaan, että estimaattorin keskineliövirhematriisin jälki $\text{tr}(\mathbf{E}(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T)) = \mathbf{E}(\mathbf{e}_k^T\mathbf{e}_k)$ olisi mahdollisimman pieni. Tätä estimaattoria kutsutaan pienimmän keskineliövirheen estimaattoriksi (MMSE-estimaattori). Koska estimaattorin tulee olla harhaton, saadaan yhtälö

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k-1} & \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{y}_k) \end{bmatrix}.$$

Käyttäen hyväksi estimaattorin $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ harhattomuutta, tilamallia (3.4) ja mittausmallia (3.5) saadaan

$$\Phi_{k-1}\mathbf{E}(\mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{J}_{k-1}\mathbf{E}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\Phi_{k-1}\mathbf{E}(\mathbf{x}_{k-1}).$$

Tämän yhtälön tulee olla voimassa riippumatta odotusarvosta $E(\mathbf{x}_{k-1})$, joten

$$\mathbf{J}_{k-1} = \Phi_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \Phi_{k-1}. \quad (3.7)$$

Tilan \mathbf{x}_k parasta lineaarista harhatonta estimaattoria, joka ei käytä hyväkseen nykyisen ajanhetken t_k mittauksia kutsutaan priori-estimaattoriksi. Toisin sanoen priori-estimaattori on samaa muotoa kuin kaavan (3.6) estimaattori, kun matriisi \mathbf{K}_k on asetettu nolla-matriisiksi. Tällöin priori-estimaattori, johon miinus yläindeksinä viittaa, on kaavan (3.7) mukaan

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}. \quad (3.8)$$

Priori-estimaattorin keskineliövirhematriisi näin ollen on

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= E((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} E((\Phi_{k-1} \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1})(\Phi_{k-1} \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1})^T) \\ &\stackrel{\text{r.ton}}{=} \Phi_{k-1} E(\mathbf{e}_{k-1} \mathbf{e}_{k-1}^T) \Phi_{k-1}^T + E(\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T) \\ &= \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \end{aligned}$$

Kaavan (3.6) estimaattoria, joka käyttää hyväkseen myös ajanhetken t_k mittaukset kutsutaan posteriori-estimaattoriksi. Posteriori-estimaattorin virhe on

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \\ &= \mathbf{x}_k - (\Phi_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \Phi_{k-1}) \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k \\ &\stackrel{(3.5)}{=} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3.9)$$

Koska priori-estimaattorin virhe $\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$ on oletusten mukaan riippumaton mittausvirheestä \mathbf{v}_k niin posteriori-estimaattorin keskineliövirhematriisi on

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T) \\ &\stackrel{(3.9)}{=} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &\stackrel{\text{harj.3.2}}{=} \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \\ &\quad + (\mathbf{K}_k \mathbf{B} - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{B}^{-1}) (\mathbf{K}_k \mathbf{B} - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{B}^{-1})^T, \end{aligned} \quad (3.10)$$

missä $\mathbf{B} = (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{\frac{1}{2}}$. Matriisin \mathbf{P}_k jälki on pienin mahdollinen kun matriisin

$$(\mathbf{K}_k \mathbf{B} - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{B}^{-1}) (\mathbf{K}_k \mathbf{B} - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{B}^{-1})^T \quad (3.11)$$

jälki on pienin mahdollinen, koska summan muut termit eivät riipu matriisista \mathbf{K}_k . Matriisin (3.11) jälki on pienin mahdollinen kun $\mathbf{K}_k \mathbf{B} - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \mathbf{B}^{-1} = 0$, harjoitustehtävä 3.3, ja tämän yhtälön ratkaisu on

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (3.12)$$

Tätä matriisia kutsutaan Kalmanin vahvistukseksi. Kokoamalla tulokset yhteen saadaan Kalmanin suodattimeksi estimaattori

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (3.13)$$

missä priori-estimaattori on annettu kaavassa (3.8) ja Kalmanin vahvistus kaavassa (3.12). Tämän estimaattorin keskineliövirhematriisi (3.10) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-.$$

Algoritmissa 3 on annettu Kalmanin suodatin tiiviissä muodossa.

Kaavassa (3.13) olevaa mittauksen \mathbf{y}_k ja ennustetun mittauksen $\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$ erotusta $\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$ kutsutaan *innovaatioksi*. Mittauksen ennusteen keskineliövirhematriisi (innovaation kovarianssimatriisi) on $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$ (harj. 3.1). Innovaation hyväksi käyttäminen on lähes ainoa tapa jolla suodattimen toimintaa voidaan tarkkailla ajon aikana. Koska innovaation kovarianssimatriisi tiedetään voidaan tehdä tilastollisia testejä, jotka kertovat onko realisoitunut mittaus todennäköinen vai ei. Monet ns. robustit suodattimet tekevät tällaisia testejä ja mikäli tuloksena on että mittaus on epätodennäköinen niin sitä ei joko käytetä ollenkaan tai sitten sitä painotetaan eri tavalla kuin ”normaaleja” mittauksia. Myöskin monet ns. adaptiiviset suodattimet hyödyntävät innovaatioita kun ne pyrkivät ajon aikana määräämään/päivittämään suodattimen parametreja esimerkiksi virheiden kovariansseja [2, luku 11].

Algoritmi 3 Kalmanin suodatin

- Tilamalli: $\mathbf{x}_k = \Phi_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{Q}_{k-1}$
- Mittausmalli: $\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{V}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{R}_k$
- Mittaukset: $y_{1:m} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$
- Alkutila-estimaatti ja -MSE: $\hat{\mathbf{x}}_0$ ja \mathbf{P}_0

1. Asetetaan $k = 1$.

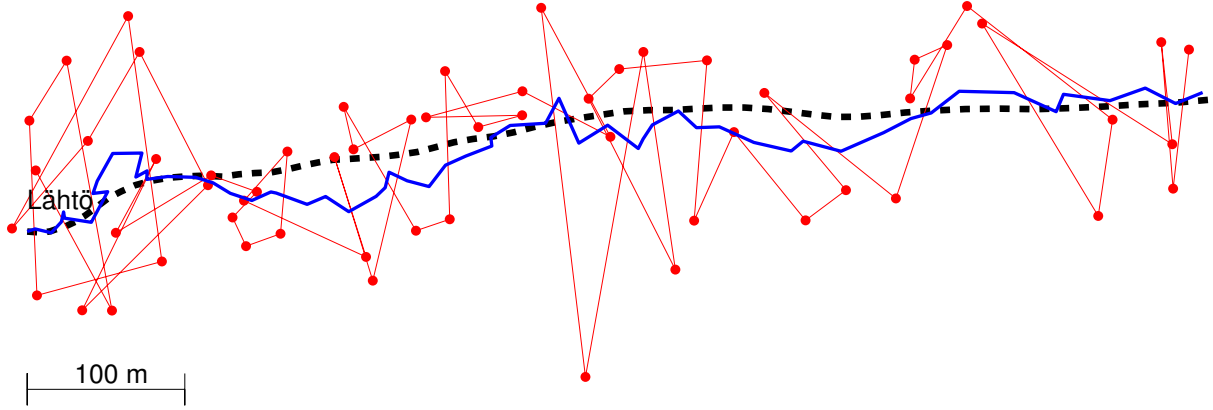
2.
 - Priori-estimaatti: $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$
 - Priori-MSE: $\mathbf{P}_k^- = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$
 - Kalmanin vahvistus: $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$
 - Posteriori-estimaatti: $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (y_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$
 - Posteriori-MSE: $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$

3. Lopetetaan jos $k = m$, muutoin asetetaan $k = k + 1$ ja palataan kohtaan 2.

Esimerkki 20 (Kalmanin suodattimesta). Kuvassa 3.1 on esimerkki tilanteesta, jossa on käytetty kappaleessa 3.1 käsiteltyä kaksiulotteista vakionopeusmallia. Vakionopeusmalli toteuttaa Kalmanin suodattimen tilamallille asettamat oletukset. Esimerkin parametrit ovat seuraavat.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= [0 \ 0 \ 5 \ 0]^T, \quad \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 10^2 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 3^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \mathbf{I} & \frac{1}{2} \mathbf{I} \\ \frac{1}{2} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H} &= [\mathbf{I} \ 0] \quad \text{ja} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 30^2 & 0 \\ 0 & 50^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Tosireitti on piirretty kuvaan mustalla katkoviivalla. Kalmanin suodattimen käyttämät mittaukset (paikkakoordinaatit) on merkitty kuvaan punaisilla pisteillä, jotka on aikajärjestyksessä yhdistetty toisiinsa ohueilla viivalla. Kalmanin suodattimen antama paikkaestimaatti on piirretty kuvaan yhtenäisellä sinisellä viivalla.



Kuva 3.1: Kuvassa on paikannettavan reitti minuutin ajalta mustalla katkoviivalla. Paikannusjärjestelmä antaa mittausmallin mukaisia paikkamittauksia sekunnin välein, saadut paikkamittaukset ovat merkitty kuvaan punaisilla pisteillä. Sininen yhtenäinen viiva kuvastaa mittauksista suodatettua paikkaestimaattia.

3.3 Epälineaariset Kalmanin suodattimet

Kalmanin suodatin on erittäin suosittu lineaarisille systeemeille, koska se on verrattain nopea laskea ja tarvitsee vain vähän oletuksia. Tämän vuoksi Kalmanin suodattimesta on tehty lukuisia laajennuksia myös epälinearisille systeemeille (3.1), (3.2). Tässä kappaleessa esitellään perusidea johon useimmat Kalmanin suodattimen laajennukset perustuvat. Aluksi esitämme hieman yleistetyn version BLU-estimaattorista. Olkoon

$$E\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{y}_k \end{bmatrix}, \text{ ja } V\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} P_{xx_k} & P_{xy_k} \\ P_{yx_k} & P_{yy_k} \end{bmatrix}.$$

Nyt tilan \mathbf{x}_k BLU-estimaattori on [2]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \bar{x}_k + P_{xy_k} P_{yy_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \bar{y}_k), \\ E((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T) &= P_{xx_k} - P_{xy_k} P_{yy_k}^{-1} P_{yx_k}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Kalmanin suodattimen epälineaariset laajennukset pyrkivät ratkaisemaan yhtälössä (3.15) olevat tuntemattomat suureet, $\bar{x}_k, \bar{y}_k, P_{xx_k}, P_{xy_k} = P_{yx_k}^T, P_{yy_k}$, jollakin approksimaatiolla. Käytämme tällaisista algoritmeista yleisnimitystä epälineaarinen Kalmanin suodatin, jonka algoritmi on annettu sivulla 46. Seuraavaksi käsittelemme hieman tarkemmin kahta yleisesti käytössä olevaa epälineaarista Kalmanin suodatinta, nk. laajennettua Kalmanin suodatinta (EKF) ja hajutonta Kalmanin suodatinta (UKF) [24].

Epälineaaraisia Kalman suodattimia käyttäessä on hyvä muistaa, etteivät ne varsinaisesti edes approksimoivat optimaalista ratkaisua, jota käsitellään kappaleessa 3.4. Tämän vuoksi esim. EKF saattaa antaa täysin vääriä tuloksia kuten sivun 54 esimerkissä. Kuitenkin useissa tapauksissa epälineaariset Kalmanin suodattimet toimivat varsin hyvin (kts. harjoitustehtävä 3.14) ja ne vaativat usein selvästi vähemmän laskentaa kuin yleiset Bayeslaisen suodattimen numeeriset approksimaatiot joita käsitellään kappaleessa 3.5. Näiden vuoksi epälineaariset Kalmanin suodattimet ovat suosittuja.

Algoritmi 4 Epälineaarinen Kalmanin suodatin

- Tilamalli: $\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{Q}_{k-1}$
- Mittausmalli: $\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{V}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{R}_k$
- Alkutila-estimaatti, -MSE ja mittaukset: $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0$ ja $y_{1:m} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

1. Asetetaan $k = 1$.

- 2.
- Priori-estimaatti: $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \bar{\mathbf{x}}_k$
 - Priori-MSE: $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_{xx_k}$
 - Posteriori-estimaatti: $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{P}_{xy_k} \mathbf{P}_{yy_k}^{-1} (y_k - \bar{y}_k)$
 - Posteriori-MSE: $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{xx_k} - \mathbf{P}_{xy_k} \mathbf{P}_{yy_k}^{-1} \mathbf{P}_{yx_k}$

3. Lopetetaan jos $k = m$, muutoin asetetaan $k = k + 1$ ja palataan kohtaan 2.

3.3.1 Laajennettu Kalmanin Suodatin

Laajennettu Kalmanin suodatin (algoritmi 4) on epälineaarinen Kalmanin suodatin, joka perustuu tilamallin ja mittausmallin 1. asteen Taylorin sarjan approksimaatioon.

- Tilamallin approksimaatio:
 $\mathbf{x}_k \approx \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \Phi_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}$, missä $\Phi_{k-1} = \mathbf{f}'_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ ja
- Mittausmallin approksimaatio:
 $\mathbf{y}_k \approx \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k$, missä $\mathbf{H}_k = \mathbf{h}'_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-)$.

Tällöin algoritmin 4 tuntemattomat suureet saadaan helposti laskettua ja ne ovat:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_k \\ \bar{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\ \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-) \end{bmatrix}, \text{ ja}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx_k} & \mathbf{P}_{xy_k} \\ \mathbf{P}_{yx_k} & \mathbf{P}_{yy_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k^- & \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \\ \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- & \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \end{bmatrix},$$

missä $\mathbf{P}_k^- = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$. On mahdollista käyttää myös korkeamman asteen Taylorin sarjaa approksimoitaessa yllä lueteltuja suureita. Tosin korkeampiasteisia sarja-approksimaatioita käytettäessä yleensä joudutaan oletamaan enemmän priori- ja posteriori-jakaumista

esimerkiksi normaalisuus, että saadaan kaavassa (3.15) olevat suureet laskettua. Usein myös jo ensimmäisen asteen Taylorin sarjan laskeminen analyttisesti tuottaa vaikeuksia ja on joissakin tapauksissa mahdotonta. Tämän vuoksi on kehitetty epälinearisia Kalmanin suodattimia, joissa ei tarvitse laskea tilasiirtofunktion tai mittaussuodattimen derivaattaa. Seuraavassa kappaleessa käsiteltävä UKF on eräs tällainen ”derivaattavapaa” suodatin.

3.3.2 Hajuton Kalmanin Suodatin

”Derivaattavapaa” epälineaarinen Kalman suodatin UKF (Unscented Kalman Filter) perustuu numeeriseen integrointimenetelmään jota kutsutaan hajuttomaksi muunnokseksi (UT). UT approksimoi funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ odotusarvoa nk. σ -pisteiden $\{\chi_0, \dots, \chi_{N-1}\}$ avulla kun tiedetään satunnaismuuttujan \mathbf{x} jakauma. Tämä numeerinen integrointimenetelmä voidaan kirjoittaa muotoon

$$E(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \int \mathbf{f}(x)p(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i \mathbf{f}(\chi_i), \quad (3.16)$$

missä painot ω_i ja sigma-pisteet χ_i valitaan siten, että approksimaatio on tarkka tietyn asteiselle polynomille $\mathbf{f}(x)$ mikäli satunnaismuuttuja \mathbf{x} on normaalisti jakautunut.

Olkoon n tilan dimensio, satunnaismuuttujan \mathbf{x} odotusarvo \hat{x} ja kovarianssimatriisi P . Tällöin yleisesti käytetty σ -pisteiden valinta sisältää $2n + 1$ pistettä, jotka ovat

Indeksi (i)	Paino (ω_i)	σ -piste (χ_i)
0	$\frac{\kappa}{\kappa+n}$	\hat{x}
$1, \dots, n$	$\frac{1}{2(\kappa+n)}$	$\hat{x} + \sqrt{\kappa+n}\sqrt{P}e_i$
$n+1, \dots, 2n$	$\frac{1}{2(\kappa+n)}$	$\hat{x} - \sqrt{\kappa+n}\sqrt{P}e_{i-n}$

(3.17)

missä \sqrt{P} tarkoittaa sellaista matriisiä jolle pätee, että $\sqrt{P}\sqrt{P}^T = P$. Parametri $\kappa > -n$ on vapaasti valittava vakio. Kyseisillä σ -pisteiden ja painojen valinnoilla approksimaatio (3.16) on tarkka mikäli satunnaismuuttuja \mathbf{x} on normaalisti jakautunut ja funktio $\mathbf{f}(x)$ on kolmannen asteen polynomi. Lisäksi valinta $\kappa = 3 - n$ minimoi neljännen asteen polynomin integraali-approksimaatiovirhettä ja sen takia se on yleisesti käytössä, katso harjoitustehtävä 3.8.

Olkoon nyt $\{\chi_{0_{k-1}}, \dots, \chi_{(N-1)_{k-1}}\}$ ajanhetken t_k posteriori-jakauman perusteella generoidut σ -pisteet. Tällöin algoritmin 4 tuntemattomat suureet saadaan ratkaistua:

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} \omega_{i_{k-1}} \mathbf{f}_{k-1}(\chi_{i_{k-1}}), & \bar{y}_k &= \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} \omega_{i_{k-1}} \mathbf{h}_k(\chi_{i_{k|k-1}}), \\ \mathbf{P}_{xx_k} &= \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} \omega_{i_{k-1}} (\mathbf{f}_{k-1}(\chi_{i_{k-1}}) - \bar{x}_k)(\mathbf{f}_{k-1}(\chi_{i_{k-1}}) - \bar{x}_k)^T + \mathbf{Q}_{k-1}, \\ \mathbf{P}_{xy_k} &= \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} \omega_{i_{k-1}} (\chi_{i_{k|k-1}} - \bar{x}_k)(\mathbf{h}_k(\chi_{i_{k|k-1}}) - \bar{y}_k)^T \text{ ja} \\ \mathbf{P}_{yy_k} &= \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} \omega_{i_{k-1}} (\mathbf{h}_k(\chi_{i_{k|k-1}}) - \bar{y}_k)(\mathbf{h}_k(\chi_{i_{k|k-1}}) - \bar{y}_k)^T + \mathbf{R}_k, \end{aligned}$$

missä $\chi_{i_k|k-1} = \mathbf{f}_{k-1}(\chi_{i_{k-1}})$. Toinen tapa on generoida nämä priori-jakauman σ -pisteet priori-jakaumasta, jonka odotusarvo on \bar{x}_k ja kovarianssimatriisin on \mathbf{P}_{xx_k} , jolloin tulokset hieman poikkeavat edellisestä toteutuksesta.

3.4 Bayeslainen suodatin

Tässä kappaleessa käytetään luvun alussa sivulla 39 esitettyjä tilamallia, mittausmallia ja alkutilaa ja niille annettuja oletuksia mm. riippumattomuusoletukset. Bayeslaisen suodatuksen tavoitteena on ratkaista tilan ehdollinen tiheysfunktio ehdolla mittaukset,

$$p_{\mathbf{x}_k|y_{1:k}}(x_k|y_{1:k}) \triangleq p(x_k|y_{1:k}).$$

Lyhennysmerkintää käytetään mikäli asiayhteydestä helposti huomaa mitä merkintä tarkoittaa. Oletetaan, että tiedetään tilan ehdollinen tiheysfunktio edellisellä ajanhetkellä $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$. Tämän hetken ehdollinen tiheysfunktio ehdolla aikaisemmat mittaukset $p(x_k|y_{1:k-1})$ saadaan ratkaistua Chapman-Kolmogorov yhtälön ja riippumattomuuksien avulla

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})dx_{k-1}.$$

Tätä jakaumaa kutsutaan priori-jakaumaksi. Ehdollinen tiheysfunktio $p(x_k|x_{k-1})$ saadaan johdettua tilamallista

$$p(x_k|x_{k-1}) \stackrel{(3.1)}{=} p_{\mathbf{w}_{k-1}}(x_k - \mathbf{f}_{k-1}(x_{k-1})).$$

Nyt Bayesin säännön ja virheiden riippumattomuusoletuksien nojalla saadaan ratkaistua kaava tämänhetkisellem ehdolliselle tiheysfunktiolle ehdolla nykyiset ja aikaisemmat mittaukset.

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{\int p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})dx_k}.$$

Tätä jakaumaa kutsutaan posteriori-jakaumaksi. Osoittajan ensimmäistä termiä

$$p(y_k|x_k) = p_{\mathbf{y}_k=y_k|\mathbf{x}_k}(y_k|x_k) \stackrel{(3.2)}{=} p_{\mathbf{v}_k}(y_k - \mathbf{h}_k(x_k))$$

kutsutaan uskottavuudeksi, huomaa ettei tämä ole todennäköisyystiheysfunktio. Posteriori-jakauman tiheysfunktio on verrannollinen priori-jakauman tiheysfunktion ja uskottavuuden tuloon. Nimittäjänä on normalisointivakio $p(y_k|y_{1:k-1})$, joka kertoo uuden mittauksen ehdollisen tiheysfunktion arvon ehdolla aikaisemmat mittaukset. Tästä suodatusta voi jatkaa rekursiivisesti.

Kuten jo todettiinkin niin lineaaris-gaussisessa tapauksessa Kalmanin suodatin ratkaisee tämän suodatusongelman, kts. harjoitus 3.7. Kuitenkaan yleisessä tapauksessa posteriori-jakaumia ei voida analyttisesti ratkaista. Tämän vuoksi on kehitelty useita numeerisia menetelmiä posteriori-jakauman approksimointiin. Näitä menetelmiä käsitellään tarkemmin kappaleessa 3.5.

Optimaalinen estimaattori

Bayeslainen suodatin antaa posteriori-jakauman, kuitenkin käytännön sovelluksissa yleensä halutaan tietää optimaalinen tilan estimaattori ja arvio estimointivirheelle. Estimaattorilla tarkoitetaan mielivaltaista funktiota, jonka argumentteina ovat mittaukset ja alkutila. Optimaalinen tarkoittaa tässä sitä että kyseinen estimaattori, jonka realisaatioita estimaatit ovat, minimoi jonkin skalaarisen kustannusfunktion $L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)$ odotusarvon, lyhyesti kirjoitettuna

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \operatorname{argmin}_{\hat{\mathbf{x}}_k} E(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)).$$

Kustannusfunktio voidaan valita monella eri tavoin ja näin saadaan erilaisia optimaalisia estimaattoreita. Yleensä oletetaan, kuten tässäkin kappaleessa, että kustannusfunktio on epänegatiivinen ja origossa se saa arvon nolla. Koska

$$E(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)) = E(E(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) | \mathbf{y}_{1:k})), \quad (3.18)$$

niin riittää löytää sellainen estimaattori joka minimoi ehdollisen odotusarvon

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \operatorname{argmin}_{\hat{\mathbf{x}}_k} E(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)) = \operatorname{argmin}_{\hat{\mathbf{x}}_k} E(L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) | \mathbf{y}_{1:k} = y_{1:k}), \quad (3.19)$$

kaikilla mittausten arvoilla $y_{1:k}$. Eräs hyvin yleinen estimaattori on pienimmän neliösumman estimaattori. Tällöin pyritään minimoimaan virheen normin neliön odotusarvoa, jolloin

$$L(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) = \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\|^2. \quad (3.20)$$

Voidaan osoittaa, että kustannusfunktiota (3.20) vastaava estimaattori on posteriorin odotusarvo

$$\hat{\mathbf{x}}_{k\text{MMSE}} = E(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k} = y_{1:k}),$$

(kts. harjoitus 3.9). Itseasiassa tätä samaa kustannusfunktiota käytettiin myös Kalmanin suodattimen johtamiseen (kappale 3.2). On kuitenkin hyvä muistaa, että Kalmanin suodatin minimoi vain odotusarvoa (3.18) lineaaristen estimaattorien joukossa, kun taas tässä kappaleessa käsiteltävät optimaaliset estimaattorit minimoivat ehdollisen odotusarvon (3.19) kaikkien estimaattoreiden joukosta. Toinen yleinen estimaattori on maximum a posteriori eli MAP-estimaattori, nimen mukaan tällöin estimaattori on

$$\hat{\mathbf{x}}_{k\text{MAP}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}).$$

MAP-estimaattori minimoi nk. *hit or miss*-kustannusfunktion $L = \lim_{\delta \downarrow 0} L_\delta$, missä

$$L_\delta(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\| \geq \delta \\ 0, & \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\| < \delta \end{cases},$$

3.5 Suodatuksen numeerisia menetelmiä

Tässä kappaleessa käsitellään numeerisia menetelmiä suodatusongelman ratkaisemiseksi. Hyvältä numeeriselta menetelmältä vaaditaan, että sillä on parametri N , jota kasvattamalla menetelmän antama ratkaisu lähestyy oikeaa ratkaisua. Toisaalta yleensä myös laskenta-aika kasvaa parametrin kasvaessa. Usein tämä parametri on parien $\{p_k^i(x), \omega_k^i\}$ ($i = 1, \dots, N$) lukumäärä N , joiden avulla voidaan approksimoida posteriori-jakauman tiheysfunktiota

$$p(x_k | y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i p_k^i(x_k).$$

Esimerkiksi partikkelisuodattimella (kappale 3.5.2) ja pistemassasuodattimella

$$p_k^i(x_k) = \delta(x_k - x_k^i),$$

missä δ on delta-funktio (Diracin deltamitta). Hila-suodattimella $p_k^i(x_k)$ on joukon A_i karakteristinen funktio ja gaussisella mixture suodattimella $p_k^i(x_k)$ on normaalijakauman tiheysfunktio.

Partikkelisuodattimen ja pistemassasuodattimen suurin eroavaisuus on siinä, että partikkelisuodattimessa partikkelit $\{x_k^i\}$ valitaan satunnaisesti kun taas pistemassasuodattimessa ne ovat determinisesti määrättyt. Partikkelisuodatin perustuu Monte Carlo -integrointiin, jota käsitellään seuraavassa kappaleessa.

3.5.1 Monte Carlo -integrointi

Monte Carlo -integrointi perustuu suurten lukujen lakiin.

Lause 7 (Vahva suurten lukujen laki). *Olkoon $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$ riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Tällöin**

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i = \mu \right) = 1$$

jos ja vain jos jakaumalla on odotusarvo ja $E(\mathbf{z}) = \mu$.

Kirjoitetaan integraali muotoon

$$I = \int g(z) dz = \int \frac{g(z)}{f(z)} f(z) dz \triangleq \int h(z) f(z) dz, \quad (3.21)$$

missä $f(z) > 0$ on satunnaismuuttujan \mathbf{z} tiheysfunktio. Tällöin edellisen lauseen mukaan otoskeskiarvo

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\mathbf{z}_i) \quad (3.22)$$

*Tällöin sanotaan, että otoskeskiarvo *suppenee melkein varmasti*. Melkein varmasta suppenemisestä seuraa myös *suppeneminen todennäköisyyden mielessä*, josta edelleen seuraa *suppeneminen jakauman mielessä*.

suppenee melkein varmasti kohti integraalia I (3.21). Mikäli $E(h(z)^2)$ on olemassa niin satunnaismuuttujan \bar{h}_n varianssia voidaan approksimoida

$$V(\bar{h}_n) = \frac{1}{n} \int [h(z) - E(h(z))]^2 f(z) dz \approx \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (h(\mathbf{z}_i) - \bar{h}_n)^2 \triangleq \sigma_{\bar{h}_n}^2. \quad (3.23)$$

Lisäksi voidaan osoittaa, että osamäärä (vrt. keskeinen raja-arvolause)

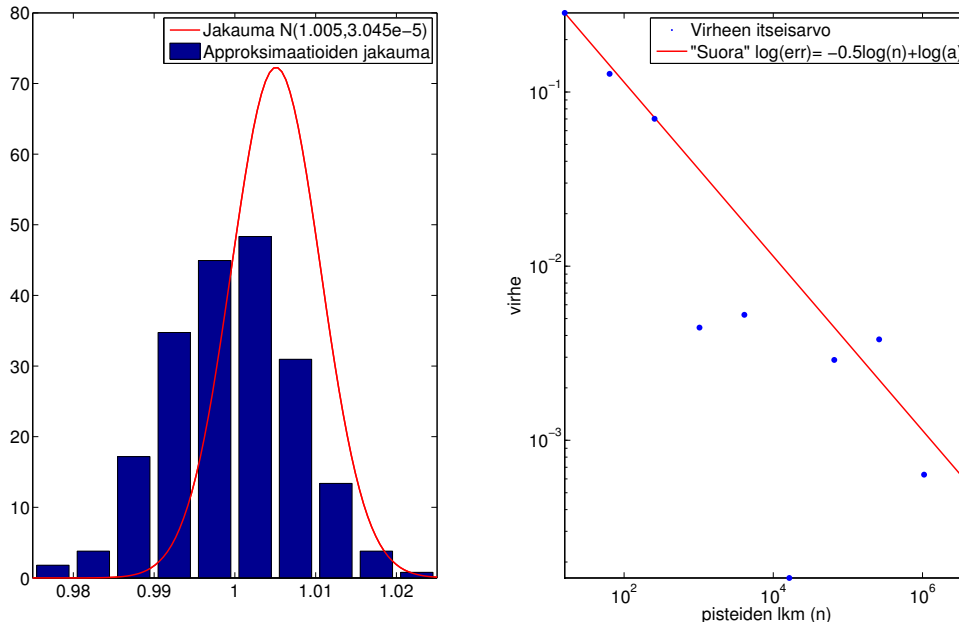
$$\frac{\bar{h}_n - E(h(z))}{\sqrt{\sigma_{\bar{h}_n}^2}}$$

lähestyy jakauman mielessä satunnaismuuttujan $N(0, 1)$ jakaumaa.

Esimerkki 21 (Monte Carlo-integrointi). *Olkoon satunnaismuuttuja $\mathbf{z} \sim N(0, 1)$ ja*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - z^2), & |z| \leq 1 \\ 0, & |z| > 1 \end{cases}$$

Tällöin integraalin $\int g(z) dz = 1$ Monte Carlo -approksimaation eräs realisaatio on noin 1.005, yhtälö (3.22) ja tämän approksimaation varianssin approksimaatio on noin $3.045 \cdot 10^{-5}$ (3.23) kun simuloitujen satunnaismuuttujien määrä $n = 10^4$. Näitä arvoja vastaavan normaalijakauman tiheysfunktio on piirretty vasemmalle puolelle kuvaan 3.2. Tiheysfunktion taustalla on piirretty histogrammi tuhannesta Monte Carlo -simulaatiosta. Histogrammi muistuttaa paljon normaalijakaumaa jonka odotusarvo on yksi, aivan teorian mukaan. Kuvassa 3.2 oikealla puolella on tutkittu Monte Carlo -integroinnin virhettä verrattuna satunnaismuuttujien simuloituun määrään n . Pisteiden taustalle on piirretty log-log asteikolla oleva suora, joka kuvastaa teorian mukaista suppenemisnopeutta $O(n^{-\frac{1}{2}})$.



Kuva 3.2: Kuva esimerkin simulaation tuloksista, selitykset löytyvät tekstistä.

3.5.2 Partikkelisuodatin

Tässä kappaleessa käsitellään partikkelisuodattimia [24]. Partikkelisuodatin perustuu Monte Carlo-menetelmään ja se approksimoi priori- ja posteriori-jakaumia otoksilla ko. jakaumista nk. partikkelipilvillä. Algoritmi 5 kuvaa yleistä partikkelisuodatinta. Itse asiassa kyseistä algoritmia voidaan pitää partikkelisuodattimien suodatusperheen algoritmina, koska valitsemalla mallin parametrejä sopivasti saamme erilaisia partikkelisuodattimia. Näitä valintoja käsitellään tässä kappaleessa. Lisäksi on hyvä muistaa ettei tämä ole yleisin formulointi partikkelisuodattimelle vaan on olemassa vielä yleisempiä tai jollakin tavalla eroavia partikkelisuodattimia.

Algoritmi 5 Partikkelisuodatin

- Tilamalli: $\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}$, $p_{\mathbf{w}_{k-1}}(w)$
- Mittausmalli: $\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$, $p_{\mathbf{v}_k}(v)$
- Alkutila ja mittaukset: $p_{\mathbf{x}_0}(x)$ ja $y_{1:m} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$
- Partikkelien määrä ja ehdokasjakaumat: N ja $g(x_k | x_{k-1}^i, y_k)$

Tässä algoritmissa $i = 1, \dots, N$.

- Simuloidaan näytteet x_0^i jakaumasta $p_{\mathbf{x}_0}(x)$
 - Asetetaan $\omega_0^i = \frac{1}{N}$ ja $k = 1$
- Simuloidaan partikkelit x_k^i jakaumasta $g(x_k | x_{k-1}^i, y_k)$
 - Asetetaan $\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{p_{\mathbf{v}_k}(y_k - h_k(x_k^i)) p_{\mathbf{w}_{k-1}}(x_k^i - f_{k-1}(x_{k-1}^i))}{g(x_k^i | x_{k-1}^i, y_k)}$
- Normalisointi: $\omega_k^i = \frac{\omega_k^i}{\sum_{i=1}^N \omega_k^i}$
- Lasketaan pyydytyt estimaatit, esim:
 - Posteriori-odotusarvo: $\hat{x}_k \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i x_k^i$
 - Posteriori-kovarianssimatriisi: $\mathbf{P}_k \approx \sum_{i=1}^N \omega_k^i (x_k^i - \hat{x}_k) (x_k^i - \hat{x}_k)^T$
- Uudelleennäytteistys tarvittaessa:
 - Simuloidaan partikkelit x_k^i jakaumasta $\sum_{i=1}^k \omega_k^i \delta(x_k - x_k^i)$
 - Asetetaan $\omega_k^i = \frac{1}{N}$
- Lopetetaan jos $k = m$, muutoin asetetaan $k = k + 1$ ja palataan kohtaan 2.

Sekventiaallinen painotuspaiminta (sequential importance sampling SIS) on yksinkertainen partikkelisuodatin ja se saadaan algoritmista 5 kun uudelleennäytteistys (kohta 5) jätetään pois. Tämä kuitenkin aiheuttaa sen että ajan kuluessa kaikki paino kertyy vain muutamalle partikkelille. Tällöin käytännössä katsoen kaikki muut painot ovat nolliä, silloin joudutaan kuluttamaan paljon laskentakapasiteettia ilman että sillä olisi vaikutusta posteriori-jakauman approksimaatioon. Tämän vuoksi SIR-suodattimessa (sampling importance resampling) uudelleen-

näytteistys tehdään joka askeleella, lisäksi ehdokasjakaumina $g(x_k|x_{k-1}^i, y_k)$ käytetään priori-jakaumia $p(x_k|x_{k-1}^i)$. Tällöin algoritmista kohdassa 2 oleva painojen kaava sievenee muotoon $\omega_k^i = p_{\mathbf{v}_k}(y_k - h_k(x_k^i))$.

SIS-suodattimessa ei tehdä ollenkaan uudelleennäytteistystä, kun taas SIR-suodattimessa se tehdään joka ajanhetki. Kumpikaan näistä ei yleisesti ottaen ole optimaalinen tapa toimia. Tämän vuoksi on kehitelty tapoja, joilla voi arvioida kannattaako uudelleennäytteistys vai ei. Eräs tällainen tapa on laskea approksimaatio efektiiviselle näytteiden lukumäärälle

$$N_{\text{eff}} \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2},$$

ja mikäli tämä on pienempi kuin tietty kynnyksarvo niin tehdään uudelleennäytteistys, muuten ei. Effektiivinen näytteiden lukumäärä arvioi kuinka monta näytettä oikeasta posteriori-jakaumasta tuottaisi saman tarkkuuden kuin suodattimen käyttämä partikkeli pilvi.

Uudelleennäytteistys voidaan tehdä monella eri tavalla. Algoritmista 6 on esitetty nk. systemaattinen uudelleennäytteistys. Laskennallisesti raskaampi uudelleennäytteistysalgoritmi (nk. multinomi uudelleennäytteistys) saadaan kun simuloidaan systemaattisessa uudelleennäytteistysalgoritmista vertailupisteet $z_i \sim \text{Tas}(0, 1]$ joka kerta. Systemaattisessa uudelleennäytteistämässä jokaisesta välistä $(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$ otetaan yksi näyte. Tämä takaa sen että jos partikkelin paino $\omega_k^j \geq \frac{l}{N}$, missä l on luonnollinen luku, niin uudelleennäytteistetyssä partikkelijoukossa partikkeli x_k^j esiintyy ainakin l kertaa. Tämä pätee myös nk. ositetussa (stratified) uudelleennäytteistyksessä missä simuloidaan yksi vertailupiste jokaiselta väliltä $(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$ ja muuten toimitaan kuten algoritmista 6.

Algoritmi 6 Systemaattinen uudelleennäytteistys

- Partikkelit ja painot $\{x_k^i, \omega_k^i\}$, missä $i = 1, \dots, N$.
1. Simuloidaan lähtöpiste: $z_1 \sim \text{Tas}(0, \frac{1}{N}]$ ja asetetaan $i = 1$.
 2. Lasketaan nykyinen vertailupiste $z_i = z_1 + (i-1)\frac{1}{N}$
 3. Asetetaan $x_k^i = x_k^j$, missä j määrätään s.e. $\sum_{l=1}^{j-1} \omega_k^l < z_i \leq \sum_{l=1}^j \omega_k^l$.
 4. Jos $i = N$ niin asetetaan $\omega_k^i = \frac{1}{N}$ kaikilla i ja lopetetaan, muutoin asetetaan $i = i + 1$ ja palataan kohtaan 2.
-

Ehdokasjakaumat $g(x_k|x_{k-1}^i, y_k)$ mainittiin edellä SIR-suodattimen kohdalla, joka käyttää priori-jakaumia $p(x_k|x_{k-1}^i)$ ehdokasjakaumina. Priori-jakaumia käytetään muissakin partikkelisuodattimissa usein ehdokasjakaumina vaikkeivät ne olekaan optimaalinen valinta efektiivisen näytteen koon kannalta. Optimaalinen valinta efektiivisen näytteiden määrän kannalta olisi käyttää posteriori-jakaumia $p(x_k|x_{k-1}^i, y_k)$ ehdokasjakaumina. Kuitenkaan yleensä näitä ei tunneta*, jolloin usein päädytään käyttämään joko priori-jakaumia tai posteriori-jakaumien approksimaatioita, jotka voidaan laskea vaikka epälineaarilla Kalmanin suodattimella (kappale 3.3).

*Koska juuri niitähän ollaan ratkaisemassa.

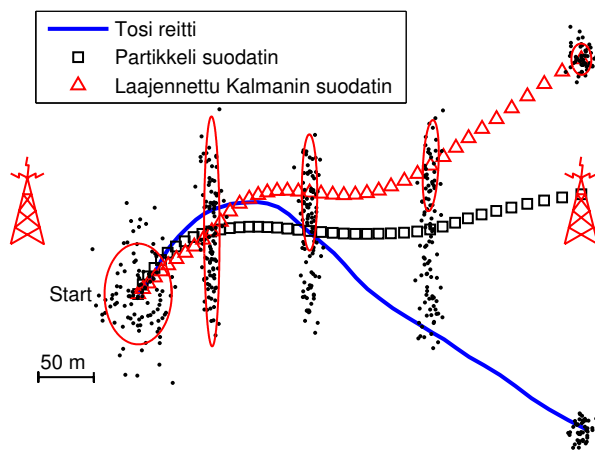
Esimerkki 22 (PF ja EKF). Kuvassa 3.3 on paikannusesimerkki käyttäen partikkelisuodatinta (PF) ja laajennettua Kalmanin suodatinta (EKF). Systemin tila on neliulotteinen, kaksi paikakoordinaattia ja kaksi nopeuskoordinaattia, muutenkin tilamallin parametrit Φ ja Q ovat samoja kuin Kalmanin suodattimen esimerkissä (3.14). Mittauksina puolestaan on sekunnin välein etäisyysmittaus (katso esimerkki 14 sivu 23) kahdesta tukiasemasta, jotka on myös piirretty kuvaan. Tällöin mittausmalli on

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_{bs_1} - \mathbf{x}_k\| \\ \|\mathbf{x}_{bs_2} - \mathbf{x}_k\| \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k,$$

missä $\mathbf{x}_{bs_1} = \begin{bmatrix} -250 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{bs_2} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v}_k \sim N(0, 10^2 \mathbf{I})$. Alkutilana systeemissä on

$$\mathbf{x}_0 \sim N \left(\begin{bmatrix} -150 \\ -30 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5^2 \end{bmatrix} \right).$$

Kuvaan on piirretty suodattimien antamat paikkaestimaatit, jotka ovat tässä tapauksessa posteriori-jakaumien odotusarvojen approksimaatioita. Ajanhetkinä $\{0, 10, 20, 30, 40\}$ on piirretty EKF antamia kovarianssimatriiseja vastaavat ellipsit. Ellipsit on määritelty siten, että jos posteriori-jakaumat olisivat normaaleja EKF:n antamin parametrein niin ellipsi edustaisi posteriori-jakauman tiheysfunktion tasa-arvo käyrää siten että n. 68% todennäköisyydellä tila on ellipsin sisällä.



Kuva 3.3: Kuva esimerkin tilanteesta.

Kuvassa 3.3 käytetty partikkelisuodatin on miljoonan partikkelin SIR-suodatin (s. 52). Partikkelipilviä on havainnoillistettu ajanhetkillä $\{0, 10, 20, 30, 40\}$ sadalla partikkelilla, jotka on saatu alkuperäisestä miljoonan partikkelin joukosta hyödyntäen systemaattista uudelleennäytteistystä (algoritmi 6). Koska partikkelien määrä on verrattain suuri niin voidaan ajatella, että partikkelisuodatin edustaa esimerkissä jonkinlaista referenssisuodatinta.

Kuvasta huomataan, että ajanhetkellä 40 posteriori-jakauma on selvästi kaksihuippuinen jakauma. EKF on lähtenyt seuraamaan toista näistä huipuista, joka on hyvin

ominaispiirteistä EKF:lla. Tässä tapauksessa EKF on "valinnut" väärän huipun ja tällöin sanotaan että EKF on hairahtunut. Tällöin EKF antaa täysin vääriä tuloksia, kuitenkin toisaalta EKF:n antama virheen kovarianssimatriisi osoittaa, että EKF luottaa hyvin paljon kyseiseen estimaattiin ja tämä aiheuttaa sen että EKF ei jatkossakaan kovinkaan helposti "löydä" oikeata paikkaa vaikka posteriori-jakauma muuttuisi yksihuippuiseksi, esimerkiksi mittauksia tulisi muistakin kuin näistä kahdesta tukiasemasta. Nyrkkisääntönä voidaankin pitää, että EKF:ää kannattaa soveltaa systeemiin, jos posteriori-jakaumat muistuttavat normaalijakaumaa eli ovat

yksihuippuisia ja jakauman ”hännät” menevät kovaa vauhtia kohti nollaa, mutta tällaisessä kaksihuippuisessa tapauksessa EKF:n soveltaminen alkaa olemaan aika riskialtista. Tosin tämäkin tilanne muuttuisi täysin mikäli etäisyysmittauksia tulisi vielä kolmannestakin tukiasemasta tai reitti ei kuljisi lähellä tukiasemien kautta kulkevaa suoraa.

Harjoitustehtäviä

3.1. Näytä, että mittauksen $\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$ ennusteen $\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$ keskineliövirhematriisi on $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$.

3.2. Oletetaan, että matriisi \mathbf{R} on symmetrinen positiivisesti definiitti ja matriisi \mathbf{P} on symmetrinen positiivisesti semidefiniitti. Osoita, että

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T = \mathbf{P} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T + (\mathbf{K}\mathbf{B} - \mathbf{A})(\mathbf{K}\mathbf{B} - \mathbf{A})^T,$$

missä $\mathbf{B} = (\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{\frac{1}{2}}$ ja $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{B}^{-1}$.

3.3. Olkoon \mathbf{A} mielivaltainen reaalmatriisi, näytä että nollamatriisi on yksikäsitteinen ratkaisu tehtävälle $\arg\min_{\mathbf{A}} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$.

3.4. Olkoon paikan priorijakauma $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(6, 8)$ ja mittausmalli $\mathbf{y} = 2\mathbf{x} + 4\mathbf{v}$, missä satunnaismuuttuja $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ on riippumaton paikan priorista. Mikä on paikan ehdollinen jakauma kun mittaus $\mathbf{y} = 14$? Tässä priorijakauma ja mittaus ovat annettu samalla ajan hetkellä.

3.5. Olkoon paikan priorijakauma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}\right)$$

ja mittausmalli $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{v}$, missä satunnaismuuttuja $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, 10)$ on riippumaton paikan priorista. Mikä on paikan ehdollinen jakauma ehdolla mittaus $\mathbf{y} = 43$? Tässä priorijakauma ja mittaus ovat annettu samalla ajan hetkellä.

3.6. Ositetulle matriisille pätee (tarkista)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \end{bmatrix},$$

mikäli tarvittavat käänteismatriisit ovat olemassa. Toisaalta tiedetään, että symmetrisen matriisin käänteismatriisi on symmetrinen. Näiden tietojen soveltamisessa matriisiin

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & -\mathbf{R} \end{bmatrix}$$

saattaa olla apua seuraavassa tehtävässä. Lisäksi olkoon \mathbf{A} ja \mathbf{B} ovat symmetrisiä, positiivisesti definiittejä matriiseja. Nyt jos $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, niin $\mathbf{B}^{-1} \leq \mathbf{A}^{-1}$ [10, Korollaari 3.3.4.].

- (a) Osoita, että $(P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} = P - P H^T (H P H^T + R)^{-1} H P$, tässä $P > 0$ ja $R > 0$.
- (b) Osoita, että lineaaris gaussisessa tapauksessa posteriorin kovarianssimatriisi on ”kasvava”. Siis osoita, että jos $0 < P_1 \leq P_2$ niin $0 < P_1^+ \leq P_2^+$, missä $P_i^+ = (I - K_i H) P_i$ ja $K_i = P_i H^T (H P_i H^T + R)^{-1}$.

- 3.7. (a) Olkoon $\mathbf{x}_{k-1} \sim N(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1})$, $\mathbf{w}_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$ ja $\mathbf{v}_k \sim N(0, R_k)$ riippumattomia satunnaismuuttujia. Mikä on satunnaismuuttujan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1} & I & 0 \\ H_k \Phi_{k-1} & H_k & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}$$

jakauma?

- (b) Olkoon

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \right),$$

näytä, että $\mathbf{x} | \mathbf{y} = y \sim N(\bar{x} + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \bar{y}), \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx})$.

- (c) Sovella (b)-kohdan tulosta (a)-kohdan jakaumaan ja vertaa saatua tulosta kappaaleessa 3.2 esitettyyn BLU-estimaattoriin.

- 3.8. Näytä, että yksiulotteisessa tapauksessa UT käyttäen kaavassa (3.17) annettuja pisteitä approksimaatio (3.16) on tarkka kolmannenasteen polynomille. Tässä luonnollisestikin $p(x)$ on jakauman $N(\mu, \sigma^2)$ tiheysfunktio. Millä perusteella valinta $\kappa = 2$ on järkevä? (vihje: $\int x^4 p(x) dx = \mu^4 + 6\mu^2 \sigma^2 + 3\sigma^4$)

- 3.9. Osoita, että posteriorin odotusarvo minimoi odotusarvon $E(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\|^2 | \mathbf{y}_{1:k} = y_{1:k})$.

- 3.10. Olkoon paikan priori-jakauma $\mathbf{x} \sim \text{Tas}(0, 3\pi)$. Mittausmallina on $\mathbf{y} = \sin(\mathbf{x}) + \mathbf{v}$, missä satunnaismuuttuja $\mathbf{v} \sim \text{Tas}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ on riippumaton priori-jakaumasta. Mikä on posteriori-jakauman tiheysfunktio kun saadaan mittaus $y = \frac{1}{2}$?

- 3.11. Olkoon \mathbf{w} :n tiheysfunktio $p_{\mathbf{w}}(w) = N_Q^0(w)$ ja \mathbf{x} :n tiheysfunktio

$$p_{\mathbf{x}}(x) = \alpha N_{\Sigma}^{\mu_1}(x) + (1 - \alpha) N_{\Sigma}^{\mu_2}(x),$$

missä $0 \leq \alpha \leq 1$ ja

$$N_{\Sigma}^{\mu}(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu))}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}}.$$

Satunnaismuuttujat \mathbf{w} ja \mathbf{x} ovat riippumattomia. Olkoon satunnaismuuttuja $\mathbf{y} = F\mathbf{x} + \mathbf{w}$, missä F on vakiomatriisi.

- (a) Laske $E(\mathbf{y})$.

(b) Laske y :n tiheysfunktio.

Lemma: Jos $\Sigma_1, \Sigma_2 > 0$ niin $N_{\Sigma_1}^{\mu}(x)N_{\Sigma_2}^{Hx}(y) = N_{\Sigma_3}^{\bar{\mu}}(x)N_{\Sigma_4}^{H\bar{\mu}}(y)$, missä $\bar{\mu} = \mu + K(y - H\mu)$, $\Sigma_3 = (I - KH)\Sigma_1$, $K = \Sigma_1 H^T \Sigma_4^{-1}$, $\Sigma_4 = H\Sigma_1 H^T + \Sigma_2$ ja $N_{\Sigma}^{\mu}(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu))}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}}$.

Tietokonetehtävät

3.12. Ohjelmoi Kalmanin suodatin, jonka määrittely näyttää seuraavanlaisesta.

```
% [X,P] = kalman(x0,P0,F,Q,Y,H,R)
%
% x_{k+1} = Fx_{k}+w
% y_{k} = Hx_{k}+v
%
% IN: x0 = alkutila hetkellä 0 (R^n)
% P0 = alkutilan kovarianssimatriisi
% F = tilansiirtomatriisi
% Q = liikemallin virheen w kovarianssimatriisi
% Y = mittaukset Y=[y_1,...,y_k](R^(m \times k)),
%      m mittausta joka ajanhetki
% H = ''mittausmalli''
% R = mittausrvirheen v kovarianssimatriisi
%
%OUT: X = [x_0,x_1,...,x_k], missä x_i on estimaatti hetkellä i.
% P(:, :, i) = keskineliövirhematriisi ajanhetkellä i
```

```
function [X,P] = kalman(x0,P0,F,Q,Y,H,R)
```

Testaa suodatinta sivulta <http://www.students.tut.fi/~aliloytt/menetelmat/harkat.html> löytyvällä datalla ja visualisoi suodattimen antamia tuloksia. Säästä teke-mäsi koodit myöhempiä käyttöä varten (tehtävä 3.14).

3.13. Laske Monte Carlo integroinnilla lauseke

$$I = \frac{\int_A \frac{x}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T x\right) dx}{\int_A \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T x\right) dx},$$

missä $A = [0, 2] \times [0, 2]$. Lisäksi tutki Monte Carlo simulaatioiden suppenemista kohti tarkkaa arvoa

$$I = \frac{1 - \exp(-2)}{\sqrt{2\pi}(\Phi(0) - \Phi(-2))} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

missä Φ on jakauman $N(0, 1)$ kertymäfunktio. Kyseinen integraali esittää posteriori-jakauman odotusarvoa, mikäli priorijakauma on $N(0, I)$ ja mittauksena tieto, että tila sijaitsee alueessa A .

3.14. Ohjelmoi kaksi suodatinta joukosta {EKF, UKF, PF}. Suodattimien määrittelyn tulee näyttää seuraavanlaisesta.

```
% [X,P,...] = suodatin(x0,P0,F,Q,Y,S,R)
%
%  $x_{k+1} = Fx_k + w$ 
%  $y_k = h(x_k) + v$ ,
% missä  $(h(x_k))_i$  on etäisyysmittaus tukiasemaan  $s_i$ .
%
% IN: x0 = alkutila hetkellä 0 ( $R^n$ )
%     P0 = alkutilan kovarianssimatriisi
%     F = tilansiirtomatriisi
%     Q = liikemallin virheen w kovarianssimatriisi
%     Y = mittaukset  $Y=[y_1, \dots, y_k]$  ( $R^{(m \times k)}$ ,
%         m mittausta joka ajanhetki)
%     S = tukiasemien koordinaatit  $[s_1, \dots, s_l]$ 
%     R = mittausvirheen v kovarianssimatriisi
%
% OUT: X =  $[x_0, x_1, \dots, x_k]$ , missä  $x_i$  on estimaatti hetkellä i.
%       P(:, :, i) = keskineliövirhematriisi ajanhetkellä i
```

```
function [X,P,...] = suodatin(x0,P0,F,Q,Y,S,R)
```

Lisäksi testaa ja vertaile suodattimia sivulta <http://www.students.tut.fi/~aliloytt/menetelmat/harkat.html> löytyvällä datalla ja visualisoi suodattimien antamia tuloksia.

Hakemisto

- >, 5, 19
- \, 6, 27
- $\cdot^{\frac{1}{2}}$, 19
- χ^2 -jakauma, 11, 20
- \geq , 5
- $A^{\frac{1}{2}}$, matriisin neliöjuuri, 5
- σ -piste, 47

- Bancroftin menetelmä, 24
- Bayesiläinen tulkinta, 34
- Bayesin kaava, 31, 37
- Bayesin suodatin, 48
- BLUE, 40

- Chebyshevin epäyhtälö, 34
- Coriolis-yhtälö, 17

- Dilution of Precision (DOP), 29
- dimensiolause, 5
- DOP, 29

- ehdokasjakauma, 53
- ehdollinen tiheysfunktio, 12
- epäkeskeinen χ^2 -jakauma, 11, 20
- epälineaarinen Kalmanin suodatin, 45, 46
- estimaatti
 - minimivarianssi-, 26
- estimaattori, 4, 49
 - BLUE, yleistetty, 45
 - harhaton, 19
 - maksimiposteriori (MAP), 49
 - maksimiuskottavuus, 30
 - paras lineaarinen harhaton, 40
 - pienimmän keskineliövirheen (MMSE), 42
 - posteriori-, 43
 - priori-, 43
- estimointi, 22
- EUREF-FIN, 14

- fingerprint-menetelmä, 36
- frekventistinen tulkinta, 34

- Gauss-Newtonin menetelmä, 27
- Gaussian mixture -suodatin, 50
- geodeettinen koordinaatisto, 14
- GPS, 14, 23, 24
- gyrotriadi, 18

- hajuton Kalmanin suodatin, 47
- harhaton estimaattori, 42

- idempotentti, 5
- innovaatio, 44
- Iterative Least Squares, 27
- Iterative Weighted Least Squares, 27

- Jacobin matriisi, 26

- Kalmanin suodatin, 42, 44
- Kalmanin vahvistus, 43
- kellovirhe, 23
- kertymäfunktio, 7
- koordinaatisto
 - geodeettinen, 14
 - inertia-, 18
 - lineaarinen, 14
 - paikallinen, 18
- koordinaattijärjestelmä
 - ECEF, 18
 - ECI, 18
 - EUREF-FIN, 14
 - WGS84, 14
- korkeus
 - geodeettinen, 14
- korrelaatiomatriisi, 8
- kovarianssimatriisi, 8, 19
- kustannusfunktio, 4, 49

- laajennettu Kalmanin suodatin, 46

likelihoid, 30
 linearisointi, 26
 luottamusväli, 34
 malli
 liikemalli, 41
 mittaus, 23
 mittausmalli, 22, 39
 tiheysmuotoinen, 30
 tilamalli, 39, 41
 vakionopeusmalli, 41
 maximum likelihoid, 30
 mittaus
 ”roska”-, 29
 -historia, 40
 -yhtälö, 22, 39
 epälineaarinen, 30, 45
 epäyhtälömuotoinen, 30
 etäisyys-, 23
 lineaarinen, 42
 pseudoetäisyys-, 23
 yhtälöryhmä, 23
 MMSE-estimaattori, 49
 Monte Carlo, 50
 Newtonin menetelmä, 27
 nolla-avaruus, 4
 normaalijakauma, 8
 ominaisuuksia, 10, 20
 visualisointi, 9, 10
 odotusarvo
 alkutilan, 42
 ehdollinen, 12
 posteriorin, 31
 ominaisarvo, 5
 ominaisvektori, 5
 ortogonaalinen, 5
 ortonormaali, 5
 painotettu Newtonin menetelmä, 27
 painovirheet, 2
 paras, 4, 23
 partikkelisuodatin, 52
 pienin neliösumma
 iteratiivinen, 27
 lineaarinen, 6, 19
 painotettu, 26
 positiivisesti (semi)definiitti, 5
 posteriori, 31, 48
 -estimaattori, 43
 approksimointi otoksella, 52
 tiheysfunktio, 48
 priori, 31, 48
 -estimaattori, 43
 approksimointi otoksella, 52
 ehdokasjakaumana, 53
 tasan jakautunut, 32, 33
 tiheysfunktio, 31
 pseudoetäisyys, 23
 pyörähdysvektori, 16
 pystyriiviavaruus, 4
 rank, 4, 19
 residuaali, 25
 riippumattomuus, 7
 satunnaismuuttuja, 7
 generoiminen, 10
 kovarianssi, 8
 mallinnus, 34
 odotusarvo, 8
 riippumattomuus, 7
 yhteisjakauma, 13
 Schurin lause, 5
 SIR-suodatin, 52
 SIS-suodatin, 52
 stokastinen prosessi, 39
 suljetun muodon ratkaisut, 24
 suodatin
 Gaussian mixture, 50
 hajuton Kalmanin (UKF), 47
 Kalmanin, 42
 laajennettu Kalmanin (EKF), 46
 partikkeli-, 52
 SIR, 52
 SIS-, 52
 suodatus, 39, 40
 suuntakosinimatriisi, 15
 suurten lukujen laki, 50
 symmetrisyys, 5
 systemaattinen uudelleennäytteistys, 53
 Taylorin kaava, 26
 tiheysfunktio, 7

ehdollinen, 12
mittausmallin, 30
normaalijakauman, 8
posteriori, 31
priori, 31
vakio-, 33
tila, 4, 22, 23, 39
-vektori, 23
virhearvio, 28
tilamalli, 39, 42
tilansiirto
-funktio, 39
-matriisi, 42

uskottavuuden maksimointi, 30
uskottavuus, 30

valkoinen kohina, 40
virhe
jakauma, 30
kello-, 23
mittaus-, 22

Weighted Least Squares, 27
WGS84, 14

ylimäärätty, 6

Kirjallisuutta

Viitteet on pyritty valitsemaan niin että ne löytyvät joko verkosta tai TTY:n kirjastosta.

- [1] BANCROFT, S. An algebraic solution of the GPS equations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 21, 7 (1986), 56–59. <http://ieeexplore.ieee.org/>.
- [2] BAR-SHALOM, Y., LI, R. X., AND KIRUBARAJAN, T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation, Theory Algorithms and Software*. John Wiley & Sons, 2001.
- [3] BORTZ, J. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 7, 1 (1971), 61–66. <http://ieeexplore.ieee.org/>.
- [4] BROWN, R. G. *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, 1983.
- [5] DAM, E. B., KOCH, M., AND LILLHOLM, M. Quaternions, interpolation and animation. Technical Report DIKU-TR-98/5, University of Copenhagen, 1998. <http://www.itu.dk/people/erikdam/DOWNLOAD/98-5.pdf>.
- [6] FANG, B. T. Simple solutions for hyperbolic and related position fixes. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 26, 5 (1990), 748–753. <http://ieeexplore.ieee.org/>.
- [7] FARRELL, J. A., AND BARTH, M. *The Global Positioning System & Inertial Navigation*. McGraw-Hill, 1999.
- [8] JAZWINSKI, A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*, vol. 64 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1970.
- [9] JHS. Julkisen hallinnon suositus JHS 153: ETRS89-järjestelmän mukaiset koordinaatit suomessa, 2006. <http://docs.jhs-suositukset.fi/jhs-suositukset/JHS153/JHS153.pdf>.
- [10] KALEVA, O. Matemaattinen tilastotiede. Opintomoniste, TTY, Matematiikan laitos, Marraskuu 2005. <http://www.tut.fi/~kaleva/>.
- [11] KALEVA, O. Matemaattinen optimointi 1. Opintomoniste, TTY, Matematiikan laitos, Tammikuu 2006. <http://www.tut.fi/~kaleva/>.

- [12] KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 82 (1960), 35–45.
- [13] KAPLAN, E. D., Ed. *Understanding GPS: principles and applications*. Artech House, Norwood, 2005.
- [14] KINCAID, D., AND CHENEY, W. *Numerical analysis*, second ed. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1996.
- [15] LEVA, J. L. An alternative closed-form solution to the GPS pseudo-range equations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 32, 4 (1996), 1430–1439. <http://ieeexplore.ieee.org/>.
- [16] MÄKI-MARTTUNEN, T. Stokastiset ja tavalliset differentiaaliyhtälöt inertiaipaikannuksessa. M.Sc. thesis, Tampere University of Technology, Dec 2008.
- [17] MAYBECK, P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol. 141 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1979.
- [18] MISRA, P., AND ENGE, P. *Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance*, 2nd ed. Ganga-Jamuna Press, 2006.
- [19] PARKINSON, B., AND SPILKER, J., Eds. *Global Positioning System: Theory and Applications Volume I*. Charles Stark Draper Laboratory, Inc., Cambridge, 1996.
- [20] PESONEN, H. Numerical integration in Bayesian positioning. M.Sc. thesis, Tampere University of Technology, June 2006. http://math.tut.fi/posgroup/pesonen_mscth.pdf.
- [21] PHATAK, M., CHANSARKAR, M., AND KOHLI, S. Position fix from three GPS satellites and altitude: a direct method. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 36, 1 (1999), 350–354. <http://ieeexplore.ieee.org/>.
- [22] POHJOLAINEN, S. Matriisilaskenta 1. Opintomoniste, TTY, Matematiikan laitos, 2004.
- [23] PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A., AND VETTERLING, W. T. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. <http://www.numerical-recipes.com/>.
- [24] RISTIC, B., ARULAMPALAM, S., AND GORDON, N. *Beyond the Kalman Filter, Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, Boston, London, 2004.
- [25] SAVAGE, P. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 21, 1-2 (1998).
- [26] SAVAGE, P. G. Strapdown inertial navigation. Lecture Notes, 1997.
- [27] VAUHKONEN, M., KARJALAINEN, P., AND TOSSAVAINEN, O.-P. Estimointiteoria. Luentomoniste, Kuopion yliopisto, 2006. <http://venda.uku.fi/studies/kurssit/ETE/>.

[28] WGS84. Department of defence world geodetic system 1984. Tech. rep., National Imagery and Mapping Agency, 2000. <ftp://164.214.2.65/pub/gig/tr8350.2/wgs84fin.pdf>.